第五章 平面等参元

三角形单元:

简单、能较好拟合边界复杂

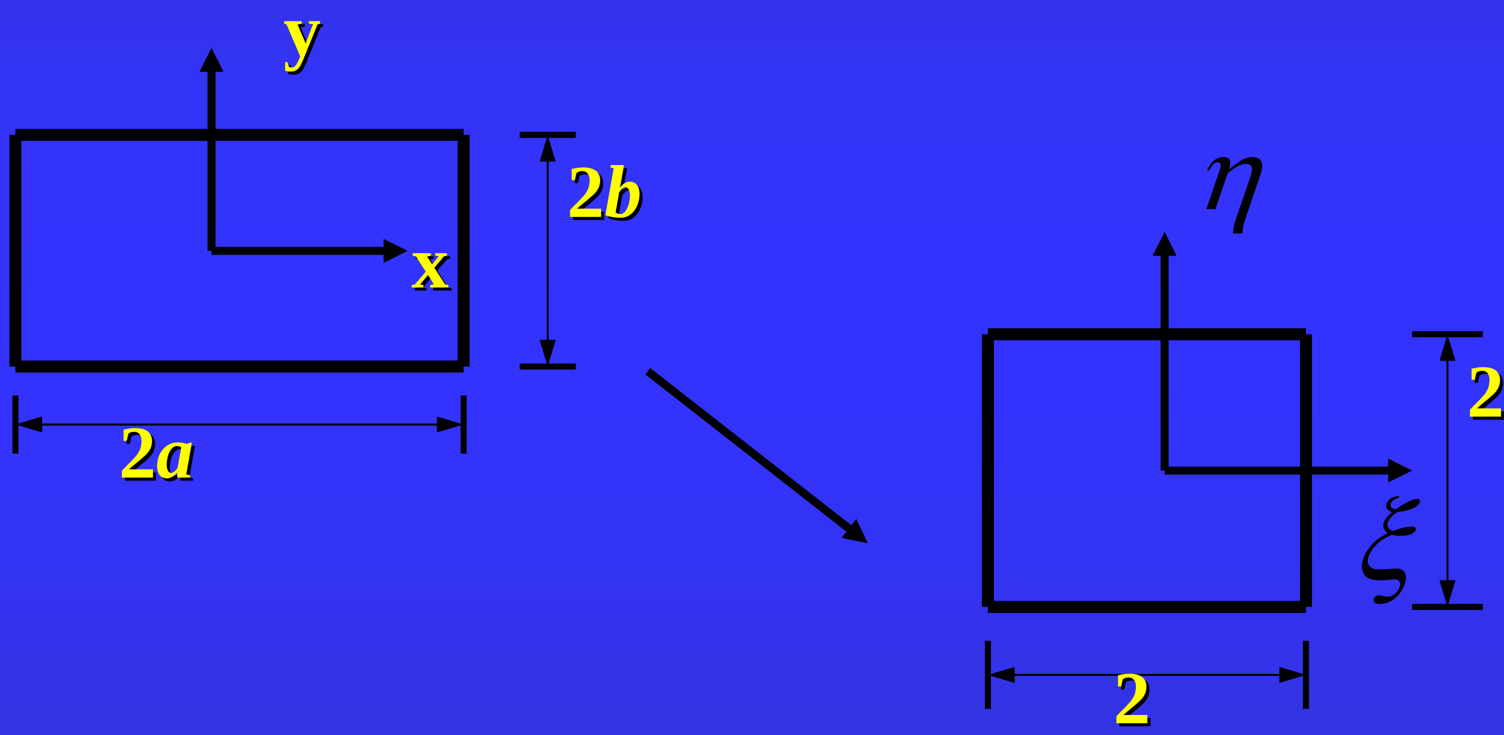
精度较低

四边形单元

正方形，矩形，四边形

5.1 矩形双线性单元

1) 自然坐标



图示矩形单元，设$\xi=x/a$，$\eta=y/b$，则转换成正则单元。

2) 形函数

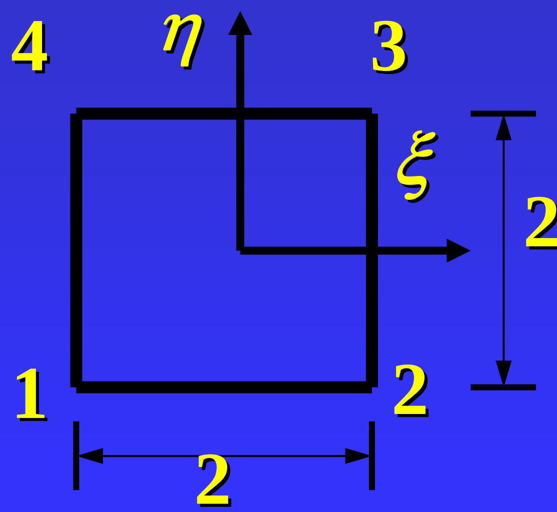
由形函数的性质“本点1，它点零”，利用试凑法可设：　$N_1=a(1-\xi)(1-\eta)$ 它满足“它点零条件”。再令本点为1，可得 $a=1/4$，代回可的形函数 N_1。

同理可得：　$N_i=1/4(1+\xi_0)(1+\eta_0)$　　$(i=1,2,3,4)$。

式中　$\xi_0=\xi\xi_i$；$\eta_0=\eta\eta_i$。

请大家验证 N_i 是否满足形函数性质。

3) 位移模式



$u=\sum N_i u_i$；　$v=\sum N_i v_i$

或以矩阵表示为

$$[N]=[[N_1]\ \cdots\ [N_4]]$$

$$[N_i]=\begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$

$$\{d\}=[N]\{a\}$$

单元结点位移

$[d]=[u,\ v]^T$

应变

$$\{\varepsilon\} = [A]^T \{d\}$$

$$\{\varepsilon\} = [A]^T \{d\} = [A]^T [N]\{a\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\}$$

$$[B]=[A]^T[N]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

应力

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

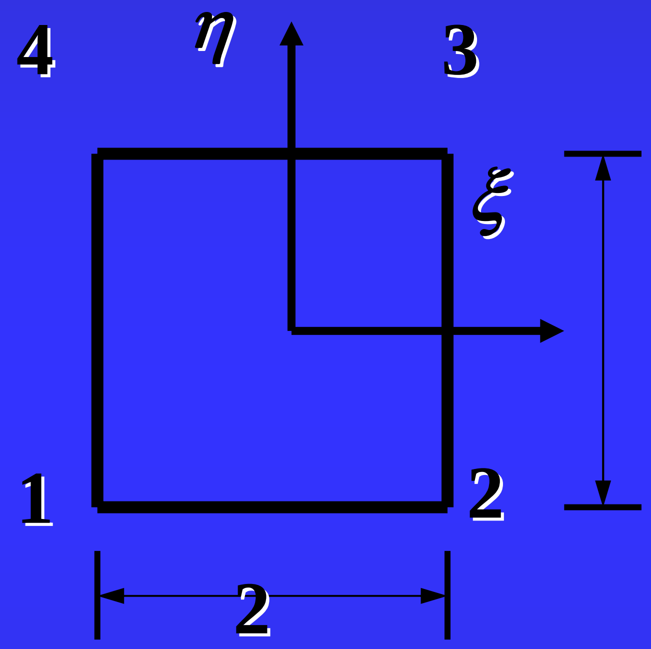
$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

平面应力

$$\{\sigma\} = [D][B]\{a\}$$

结点力

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \vdots \\ F_{y4} \end{Bmatrix}_{8\times 1}$$



4) 单元刚度矩阵

用虚功原理导出单元刚度矩阵

设有虚位移{a*}，对应的应变为{ε*}=[B]{a*}，则：

外力虚功=虚应变能

$$\{a^*\}^T\{F\} = \iiint_{Ve} \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV$$

$$= \iiint_{Ve} \{a^*\}^T [B]^T \{\sigma\} dV$$

$$\{F\} = \iiint_{Ve} [B]^T \{\sigma\} dV$$

$$= \iint_{Se} [B]^T \{\sigma\} t dS$$

$$\{F\} = \iint_{Se} [B]^T \{\sigma\} t dS$$
$$= \iint_{Se} [B]^T [D][B]\{a\} t dS$$

$$\{F\} = [k]\{a\}$$
$$[k] = \iint_{Se} [B]^T [D][B] t dS$$ 单元刚度阵

有限元方程

5）组装单元刚度阵

$$K=\sum k$$

6）引入边界条件，解方程

$$[K]\{a\}=\{F\}$$

7) 关于计算结果

位移结果比应力、内力结果精度高。

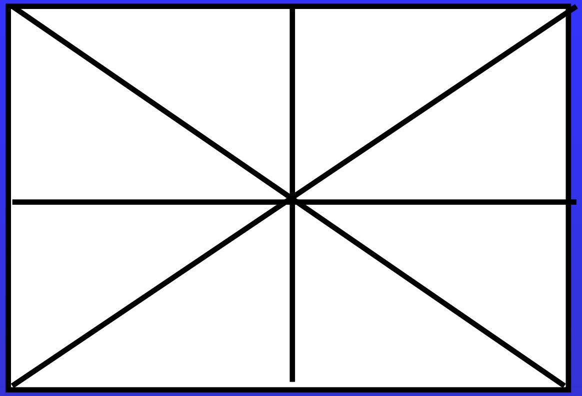
由几何方程求应变，再由物理方程求应力，结果精度较差。

应力在各个单元上是不连续的。

对应力的处理方法:

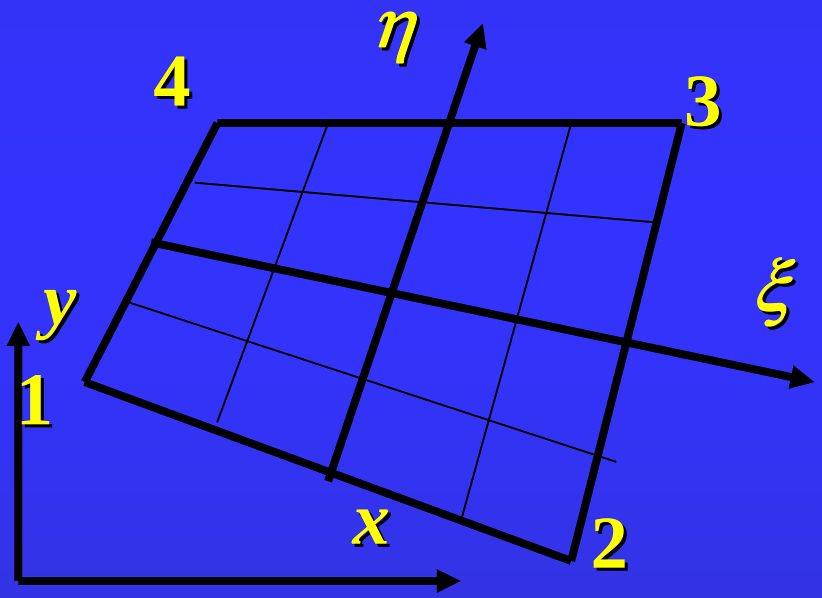
绕结点平均法

以交于同一结点各单元此结点处某应力分量的代数平均值，作为此结点实际应力的近似值。

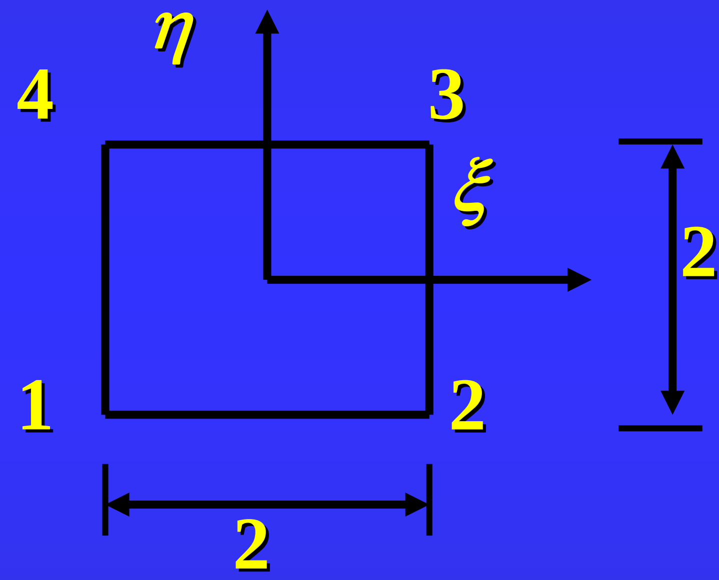


5.2 四边形等参单元

4结点等参元



子单元（等参元）



母单元

1 单元描述

母单元形状都是正方形，用自然坐标（ξ, η）表示，形函数为 $N_i(\xi, \eta)$

四边形单元用整体坐标（x,y)表示，设 i 点的坐标为：(x_i,y_i),

$$x=\Sigma N_i x_i \;; \quad y=\Sigma N_i y_i$$

确定了四边形单元的形状

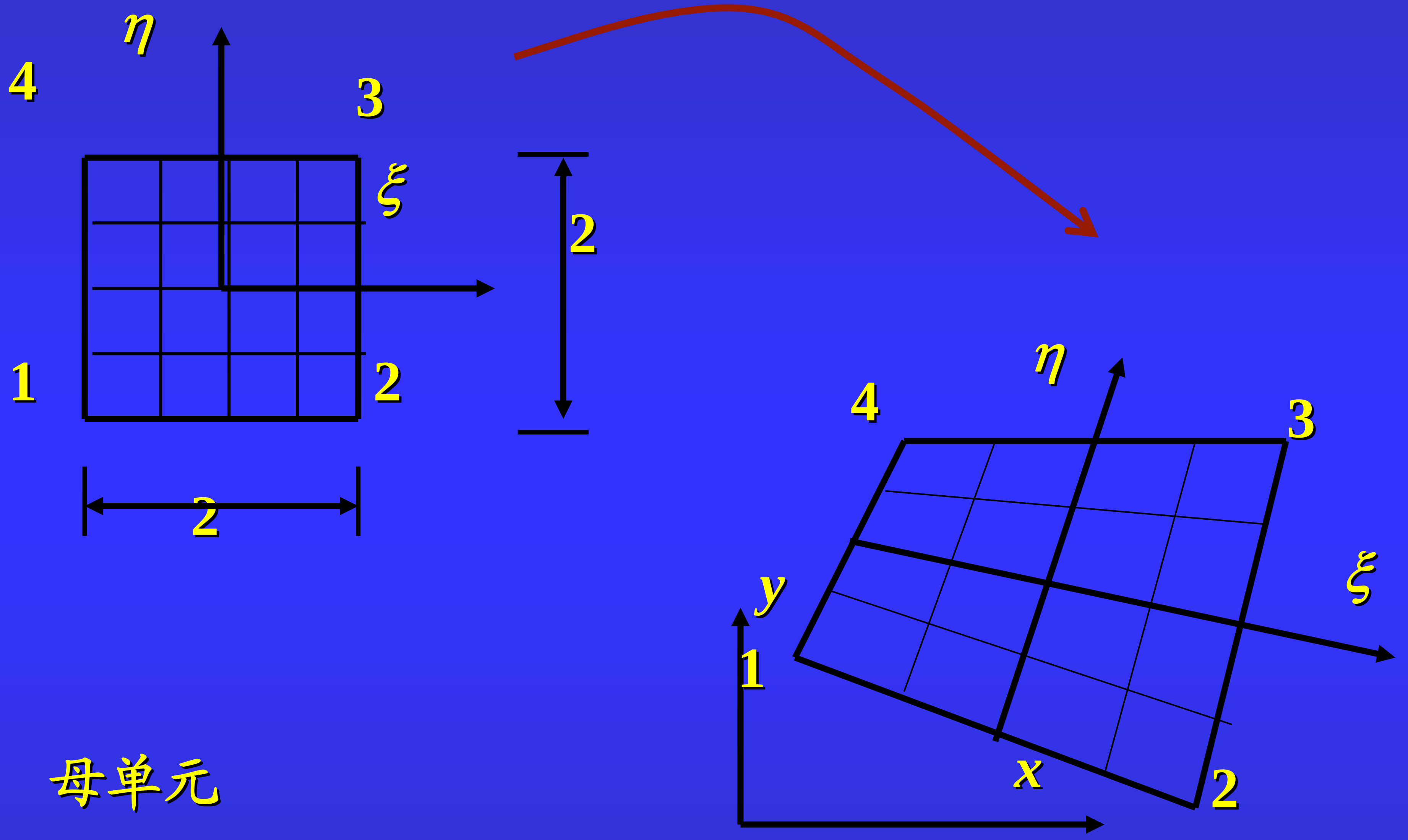
由上述转换公式可看出：

1) 母单元正交坐标线映射后成为图示子单元斜角坐标线。仍为直线。

2) 也可认为子单元有两套坐标系：整体x,y坐标，和局部ξ,η坐标。ξ,η坐标又是母单元正交坐标。

4) 规则母单元可映射出任意四边形单元。

5) 相邻单元映射后仍然连续



母单元

子单元（等参元）

2 单元位移模式

设 i 点的位移为：(u_i, v_i)，

则单元位移场为 $u=\Sigma N_i u_i$；$v=\Sigma N_i v_i$

用矩阵表示为

$$\{d\} = [N]\{a\}^e$$

等参元的概念:

单元的坐标插值和位移插值使用相同的节点和形函数。

另外还有：亚参元和超参元

3 坐标系间的转换关系

由复合函数求导数的规则可得

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

4 应变

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\}$$

$$[B] =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

5 应力

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [S]\{a\}^e$$

6 单元总势能

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint_{Ve} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \iint_{S_p} \{d\}^T \{P\} dS$$

7 有限元方程

$$[k]^e\{a\}^e = \{F\}^e$$

$$[k]^e = \iint_A [B]^T[D][B]t\,dA$$

$$\{F\}^e = \int_{S_p} [N]^T\{P\}dS$$

总体有限元方程

$$[K]\{a\} = \{F\}$$

$$[K] = \sum [k]^e$$

$$\{a\} = \sum \{a\}^e$$

$$\{F\} = \sum \{F\}^e$$

8 积分的计算

单元刚度矩阵和等效节点荷载中的积分

$$dA = dxdy = \left|J\right| d\xi d\eta$$

$$[k]^e = \iint_A [B]^T [D][B] t dA$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B]^T [D][B] t \left|J\right| d\xi d\eta$$

5.3 其他等参元

1) 八结点等参元（矩形族）

用试凑法N_1可设为：$N_1=a(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$;
它能自动满足它点为零。本点为1得:
$a=-1/4$

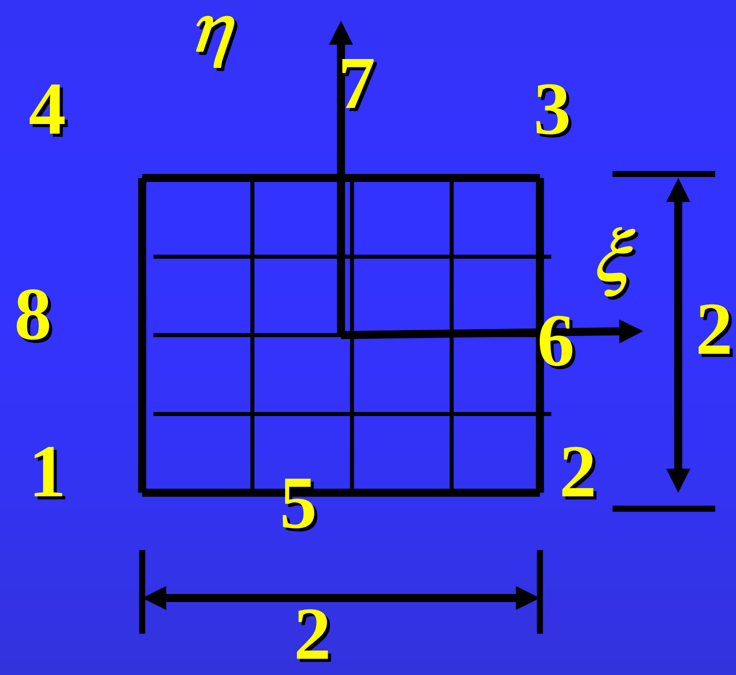
用试凑法N_5可设为：$N_5=a(1-\xi^2)(1-\eta)$；
它能自动满足它点为零，本点为1得：$a=1/2$

同理可得角结点N_i通式为:
$N_i=-1/4(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1-\xi_0-\eta_0)$　　$(i=1,2,3,4)$.
式中$\xi_0=\xi\xi_I$;$\eta_0=\eta\eta_i$.

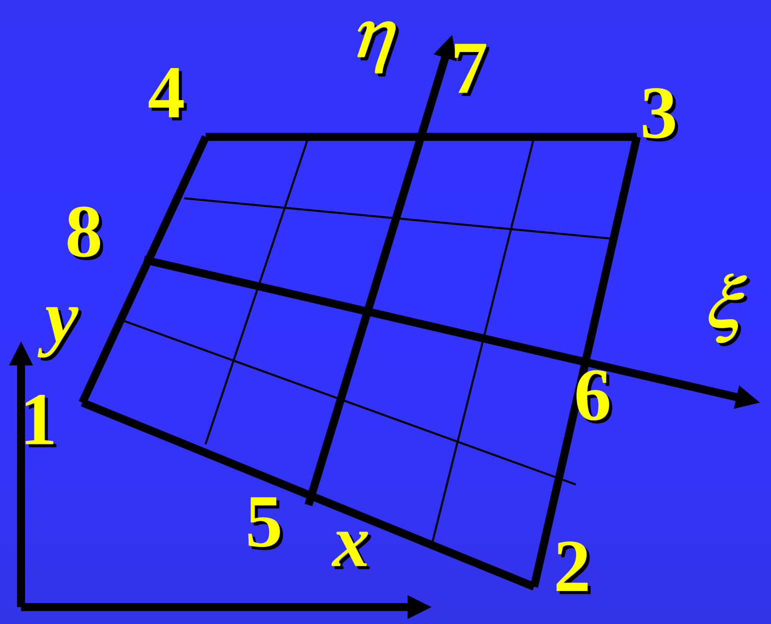
同理可得边中点N_i通式为:

$$N_{5,7}=1/2(1-\xi^2)(1+\eta_0)$$

$$N_{6,8}=1/2(1-\eta^2)(1+\xi_0)$$



母单元



子单元（等参元）

2) 六结点(三角形族)

设$N_1=a\xi(\xi-1/2)$；它满足它点为零条件，为使本点为1，可得$a=2$。同理可得

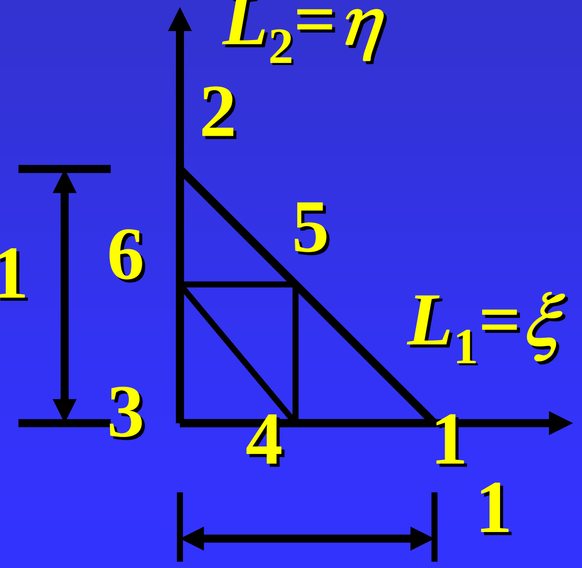
$$N_i=L_i(2L_i-1) \qquad (i=1,2,3)$$

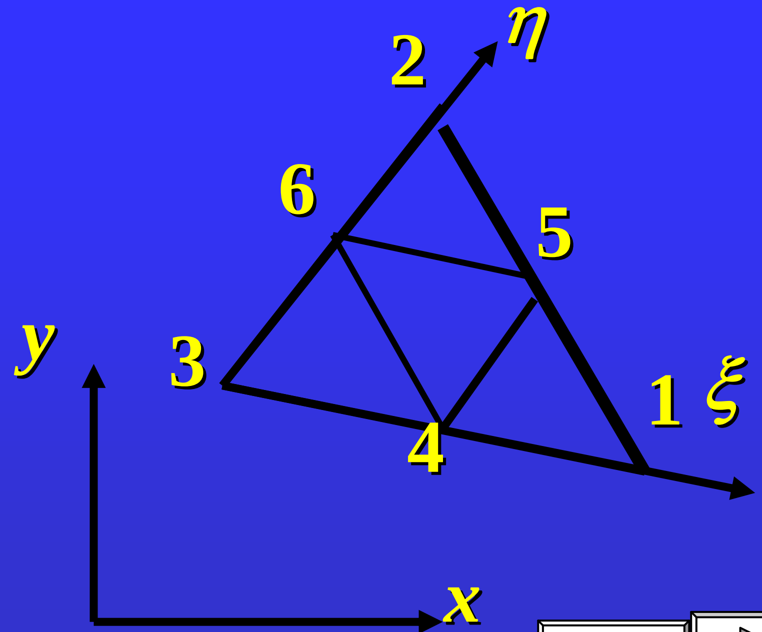
设$N_4=aL_1L_3$；它满足它点为零条件，为使本点为1，可得$a=4$。

$$N_4=4L_1L_3$$

$$N_5=4L_2L_1$$

$$N_6=4L_3L_2$$





3) 常用的两族单元

矩形：四、八、十二结点等参元

三角形：三、六、九结点等参元

$$[N]=\left[[N_1]\quad \cdots \quad [N_n]\right]$$

$$[N_i]=\begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$

结点数

4 单元描述和位移模式

1) 单元描述

2) 位移模式

$$[x]_e = \left[[x_1]^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad [x_n]^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}}$$

$$[\bar{d}]_e = \left[[\bar{d}_1]^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad [\bar{d}_n]^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}}$$

$$[x] = [x \quad y]^{\mathrm{T}} = [N][x]_e$$

$$[d] = [u \quad v]^{\mathrm{T}} = [N][\bar{d}]_e$$

6 等参元单元分析

记微分符号: $D_x=\frac{\partial}{\partial x};D_\xi=\frac{\partial}{\partial \xi}$

记 $D_x^i=D_xN_i;D_y^i=D_yN_i$

1) 应变矩阵

$$[B_i]=\begin{bmatrix} D_x^i & 0 \\ 0 & D_y^i \\ D_y^i & D_x^i \end{bmatrix}$$

$$x=\sum_i N_i x_i;y=\sum_i N_i y_i$$

$$[J]^{-1}=\left|[J]\right|^{-1}\begin{bmatrix} D_\eta y & -D_\xi y \\ -D_\eta x & D_\xi x \end{bmatrix}$$

$$D_x^i=\left|[J]\right|^{-1}(D_\eta yD_\xi N_i - D_\xi yD_\eta N_i)$$

$$D_y^i=\left|[J]\right|^{-1}(-D_\eta xD_\xi N_i + D_\xi xD_\eta N_i)$$

2) 应力矩阵

弹性矩阵：$[D]$

$$[\sigma]=[D][\varepsilon]=[S]\left[\overline{d}\right]_e$$

3) 单元应变能

$$U=\frac{1}{2}\int_A[\sigma]^{\mathrm{T}}[\varepsilon]t\mathrm{dA}$$

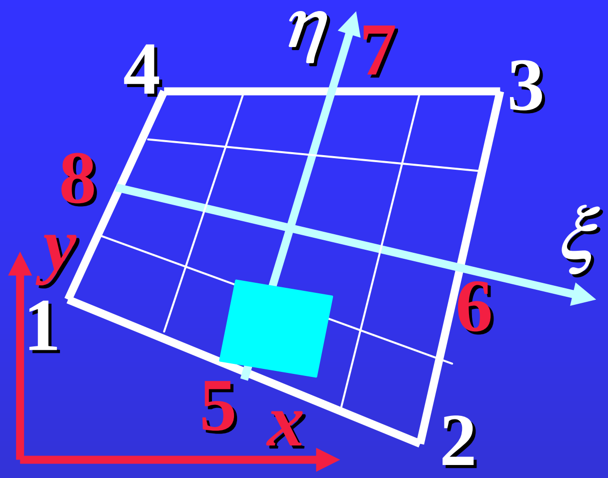
4) 单元外力势能

$$P_f = \left\{ -t\int_A [F_b]^{\mathrm{T}}[N]\mathrm{dA} - \left[\overline{F}\right]_e^{\mathrm{T}}\left(-t\int_{l_{ij}}[\phi]^{\mathrm{T}}[N]\mathrm{ds}\right)\right\}\left[\overline{d}\right]_e$$

5) dA、ds 的计算

为用虚位移原理推导单元刚度方程，必须解决dA、ds 的计算。

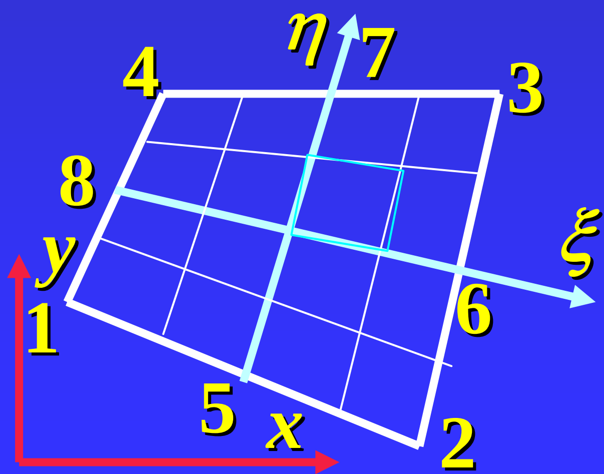
母单元规则微元体$d\xi d\eta$映射后变成图示（曲边）四边形。



如图示，此微面积为

$$\mathrm{dA} = \left| \mathrm{d}\vec{\xi} \times \mathrm{d}\vec{\eta} \right| = \left| [J] \right| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

$$= det\left| [J] \right| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$



坐标的积分上下限均为-1，1。

沿边线的积分（ η=1为例）

$$\mathrm{ds}\Big|_{\eta=1} = \left| \mathrm{d}\vec{\xi} \right|_{\eta=1} = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_{\eta=1}^{2} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\Big|_{\eta=1}^{2} \right]^{1/2} \mathrm{d}\xi$$

$$[J] = \begin{bmatrix} D_\xi x & D_\xi y \\ D_\eta x & D_\eta x \end{bmatrix}$$

$$x = \sum_i N_i x_i$$

$$y = \sum_i N_i y_i$$

一般情况见 P.72 式(3,6-23)。

有了上述结果，经虚位移原理或势能原理即可推得式(3,6-24)~(3,6-26)单元刚度和等效荷载结果。

7 数值积分

三角形和矩形单元可以写出刚度显式表达式，但对于等参元，由于两套坐标的转换，导致刚度、荷载的被积表达式十分复杂，一般不可能积出显式结果。只能用数值积分由程序来得到。

目前常用的是高斯积分（矩形族）和哈默尔积分（三角形族）。它们的积分点位置、加权系数等见表3-1、3-2（P.74~76)。

其积分公式见式（3,6-40）、（3,6-41）。

8 作等参元分析时应注意的问题

等参元分析中要用$det[J]^{-1}$，可见雅可比行列式等于零将导致刚度矩阵等无法积分，使分析失效。因此要避免以下可能使$det[J]=0$的情况:

1) 子单元边界不能过于扭曲。

2) 矩形子单元不能退化成三角形。

3) 子单元角顶处单元边线切线角角不能等于180^0。

上述情况如 P.81 图3-39 示意。

此外,子单元边界上结点应尽可能是或接近等分点，避免产生奇异单元。

可能情况下应采用直边子单元，这样可使雅可比矩阵简单，提高计算效率。

9 离散化时应注意的问题

除对等参元应注意上述问题外，任何有限元分析都还应注意以下几点:

1) 相互邻接的单元大小应尽可能均匀。

2) 单元最大尺寸与最小尺寸之比应尽可能接近一，最多不应大于二。

3) 应合理编码，使单元结点间的整体编号差值最小。

4) 应尽可能使各界点的单元数目相同,如 P.82 图3,6-42左图示意.

第六章　平面问题三角形程序

1) 程序功能

　　本程序可用三角形单元计算平面问题。包括平面应力、平面应变和平面轴对称问题。

　　本程序为了减少计算数据的准备，对规则问题具有做、单元结点编码等自动生成功能。

　　本程序为Fortran源代码程序，可自行修改，例如：增加功能，改进界面等。

本程序可以用来计算如墙梁、剪力墙（可以带孔洞）等结构。

2）程序数据文件说明

2-1）基本数据

单元总数，结点总数，问题标志，
结点位移数，单元结点数，
单元与结点编码，约束位移码数，最大半带宽，
结点的坐标，约束标志，
弹性常数，厚度。

2-2) 结点坐标

如果形状不规则：按结点号顺序读入全部结点的坐标值。

如果形状规则且无孔： *X*方向单元数，*Y*方向单元数，*X*方向单元长度， *Y*方向单元长度。

如果形状规则且有孔:

控制结点数，生成结点类数。

结点号，*X*，*Y*

起点号，终点号，生成的点数，相邻点号差值，“相邻两点间距”。

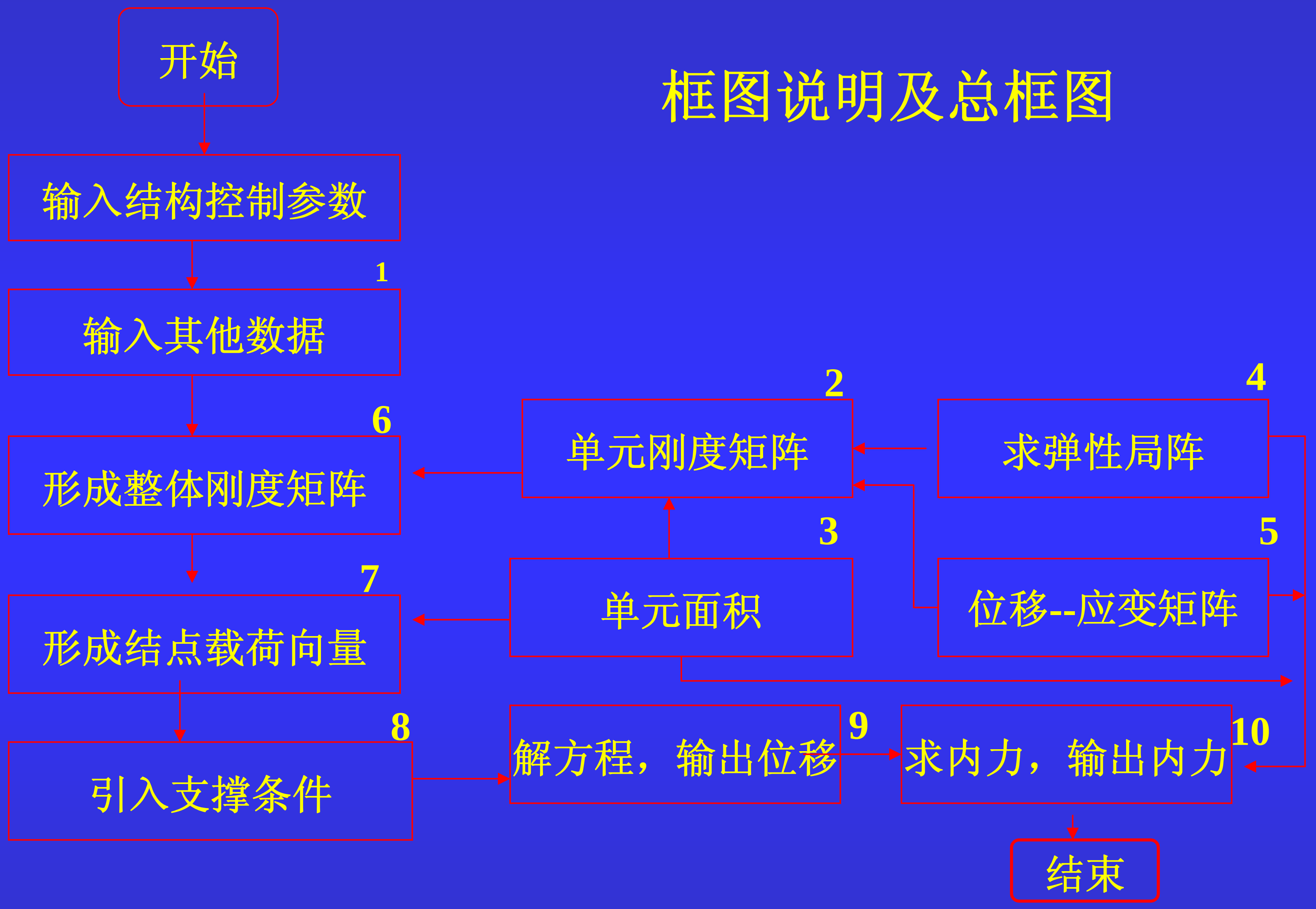
2-3）读入结点荷载值

有荷载的结点数

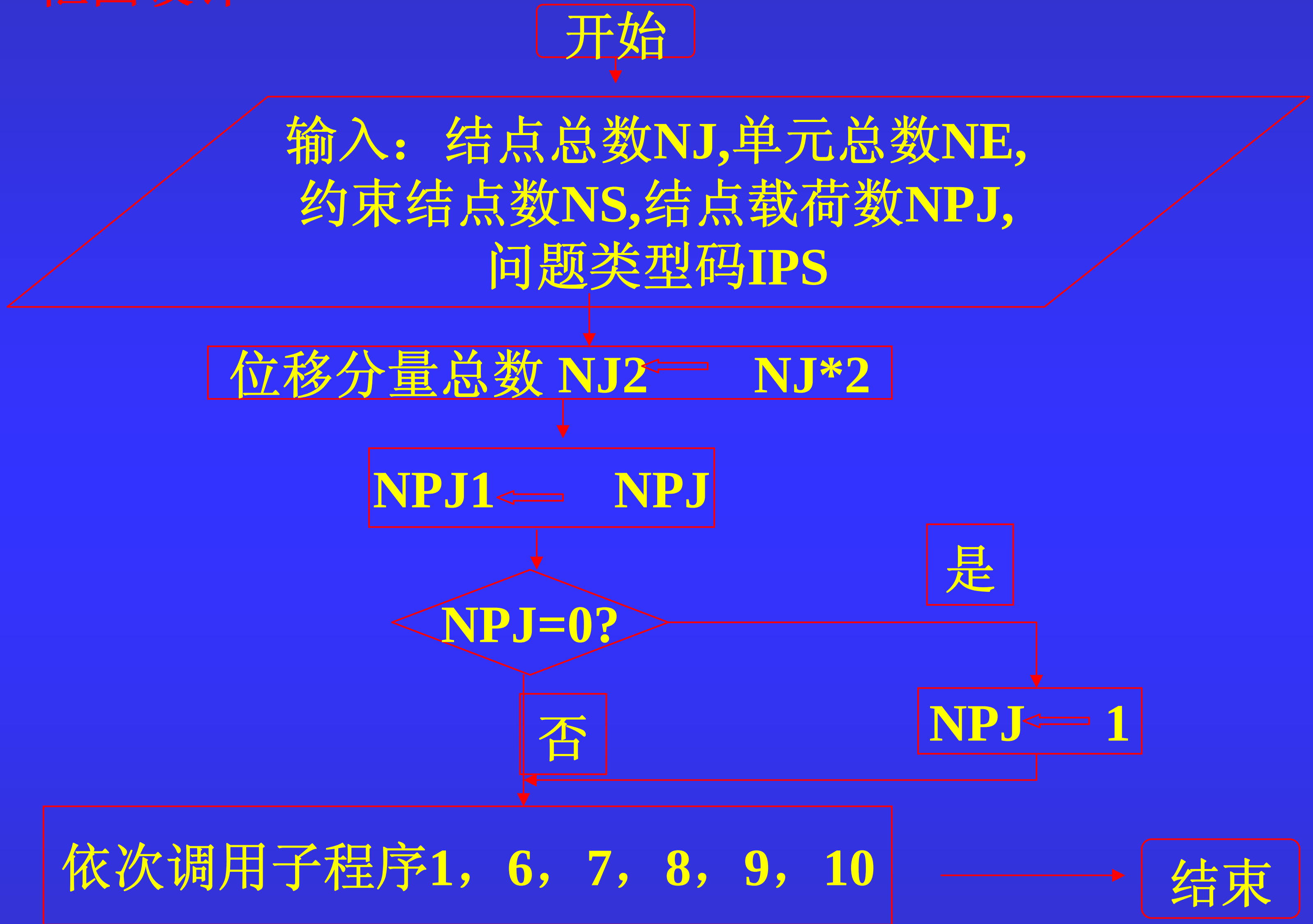
结点号，*X*方向荷载值，*Y*方向荷载值。

2-4）单元的整体结点码

框图说明及总框图


开始
输入结构控制参数
1
输入其他数据
6
形成整体刚度矩阵
7
形成结点载荷向量
8
引入支撑条件
2
单元刚度矩阵
3
单元面积
4
求弹性局阵
5
位移--应变矩阵
解方程，输出位移
9
求内力，输出内力
10
结束

框图设计



开始
输入：结点总数NJ,单元总数NE,
约束结点数NS,结点载荷数NPJ,
问题类型码IPS
位移分量总数 NJ2 NJ*2
NPJ1 NPJ
NPJ=0?
是
NPJ 1
否
依次调用子程序1，6，7，8，9，10
结束

程序说明

1 程序标识符说明

（1） 整体变量

NE---单元总数

NJ---结点总数

NS---支撑结点数

NPJ--有荷载作用的结点数IP---平面问题类型数码

IPS=0 平面应力问题

IPS=1 平面应变问题

NPJI--结点荷载信息

NJ2--位移分量总数，NJ2=NJ*2

NW--半带宽

IE--单元序号

（2） 实型变量

E---弹性模量

PR--泊松比

T--单元厚度

V--材料容重

AE--单元面积

SGX,SGY,TXY---应力分量

ASG,RSG---平面应力，应力圆半径

SGMA,SGMI---最大与最小主应力

CETA---主平面角

（3） 整型数组

LND(N E,3)---单元结点数码组

JR（N S，3）--支撑结点数组

（4）实型数组

X(N E),Y(N E)--结点坐标数组

PJ(N P J,3)--结点载荷数组

D(3,3)--弹性矩阵[D]

B(3,6)--位移--应变转换矩阵

S(3,6)--应力--位移转换矩阵

ST(3)--单元应力数组

DE(6)--单元结点位移向量

KE(6,6)--单元刚度矩阵

KS(N J 2,N W)--整体刚度矩阵（半带贮存）

P(N J 2)--载荷向量，后存放结点位移