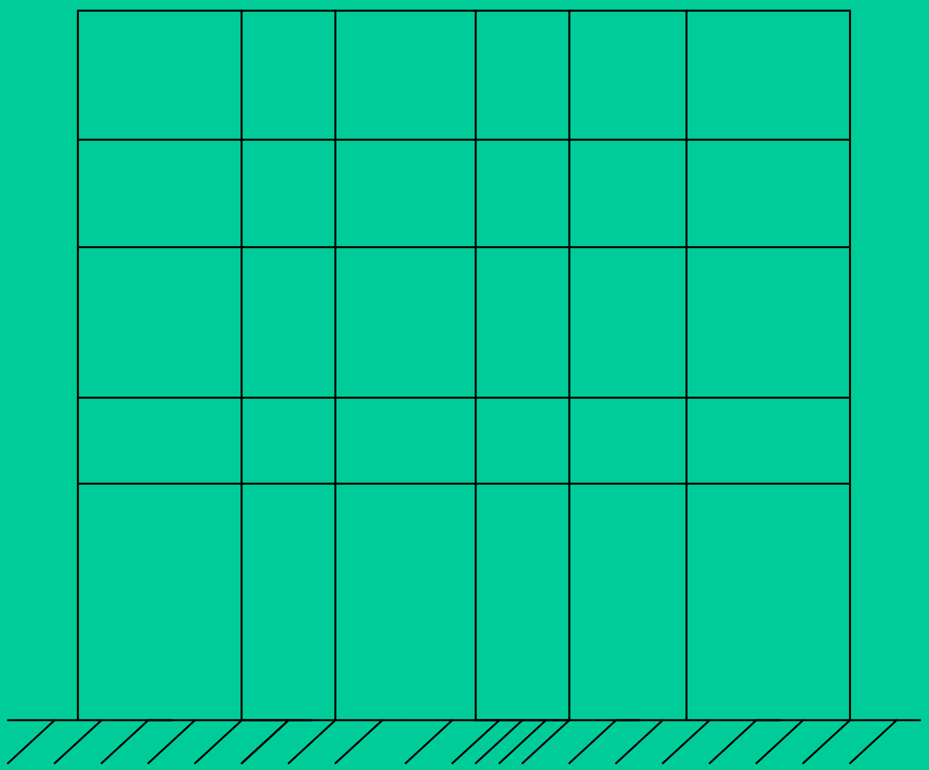
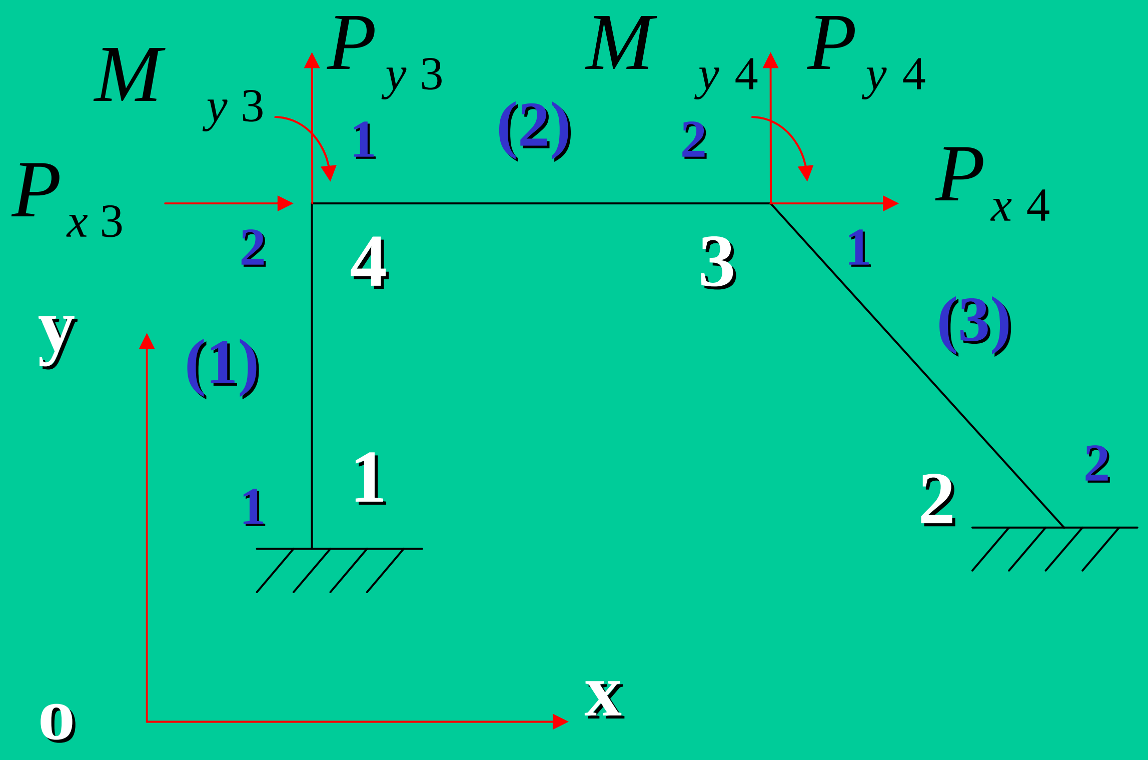
第三章 平面刚架的有限元



主要内容:

了解有限元的基本概念,掌握求解局部坐标系下的单元刚度矩阵,公共坐标系的单元刚度矩阵以及公共坐标系的整体刚度矩阵.

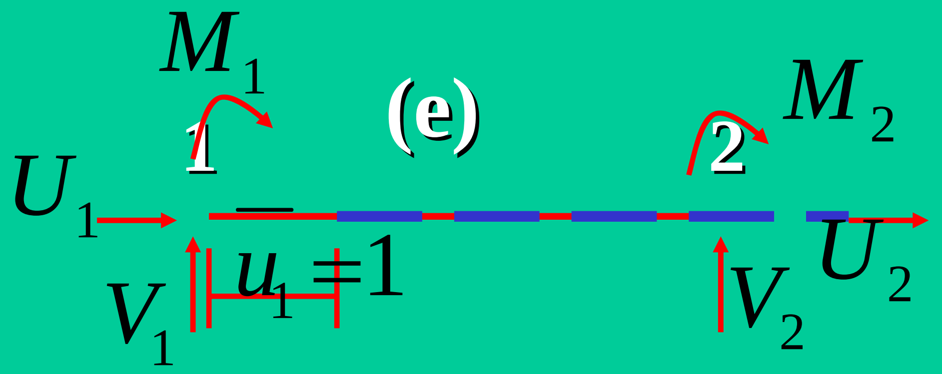
第三章 平面刚架的有限元



§3.1单元刚度矩阵(局部坐标系)

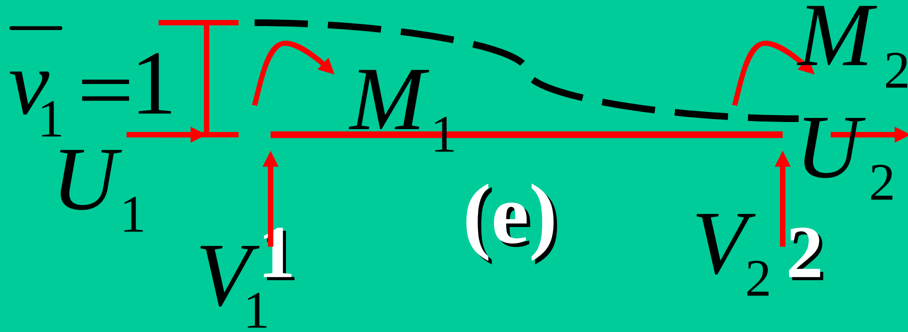
a. $\bar{u}_1 = 1, \bar{v}_1 = 0, \bar{\theta}_1 = 0$

$$\bar{U}_1 = \frac{EA}{l}, \bar{V}_1 = 0, \bar{M}_1 = 0$$



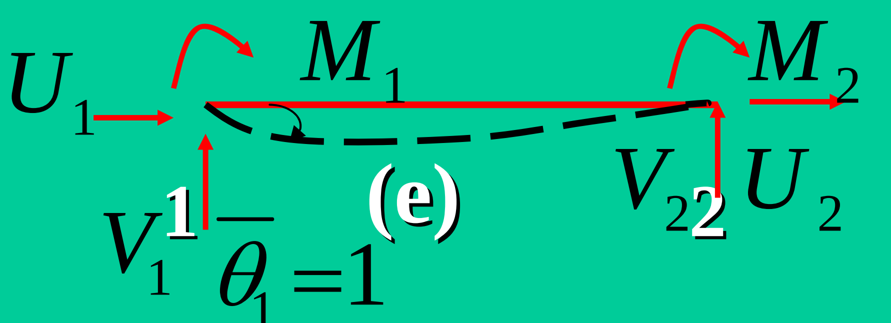
b. $\bar{u}_1 = 0, \bar{v}_1 = 1, \bar{\theta}_1 = 0$

$$\bar{U}_1 = 0, \bar{V}_1 = \frac{12EI}{l^3}, \bar{M}_1 = -\frac{6EI}{l^2}$$



c. $\bar{u}_1 = 0, \bar{v}_1 = 0, \bar{\theta}_1 = 1$

$$\bar{U}_1 = 0, \bar{V}_1 = -\frac{6EI}{l^2}, \bar{M}_1 = \frac{4EI}{l}$$



杆端力 $\{\overline{F}\}^{(e)}$ 与杆端位移 $\{\overline{a}\}^{(e)}$ 的关系：

$$\begin{array}{c} \\ \begin{Bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{V}_1 \\ \overline{M}_1 \\ \overline{U}_2 \\ \overline{V}_2 \\ \overline{M}_2 \end{Bmatrix} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overline{u}_1=1 & \overline{v}_1=1 & \overline{\theta}_1=1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 & \times & \times & \times \\ 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l & \times & \times & \times \\ -EA/l & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 & \times & \times & \times \\ 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l & \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix} \end{array}$$

$$\left\{\overline{F}\right\}^{(e)}=\left[\overline{k}\right]^{(e)}\left\{\overline{a}\right\}^{(e)}$$

$\left[\overline{k}\right]^{(e)}$ 中每个元素代表由单位结点位移而引起的杆端力

j—在j点有单位位移 （作用点）

i—j点单位位移在i点产生的杆端力

（作用效果）

$$
\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{V}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}
$$

$$
\{\bar{F}\}^{(e)} = [T]\{F\}^{(e)}
$$

[T]——坐标转换矩阵

$$\{\underline{E}\}_{(6)} = [L]\{E\}_{(6)}$$

$$\{\underline{a}\}_{(6)} = [L]\{a\}_{(6)}$$

$[T] = [T]^{-1}$ —**[T]为正交矩阵** $[T]^T = [T]^{-1}$

$$\{F\}^{(e)} = [k]^{(e)}\{a\}^{(e)}$$

$$\{F\}^{(e)} = [T]^T \{\overline{F}\}^{(e)}$$

$$[k]^{(e)} = [T]^T [\overline{k}]^{(e)} [T]$$

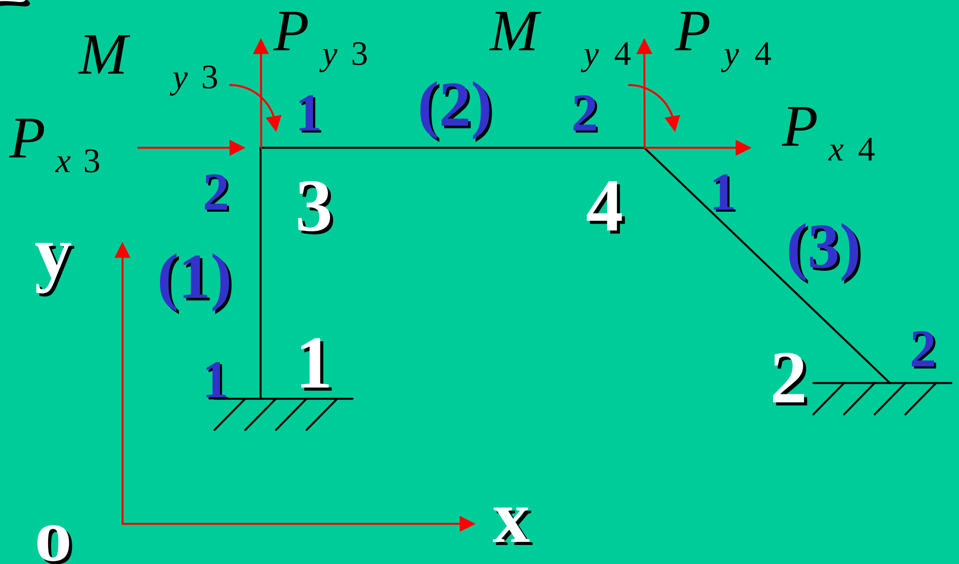
$[\overline{k}]^{(e)}$和$[k]^{(e)}$的性质：

(1)对称性：

(2)奇异性： $\left|[\overline{k}]^{(e)}\right| = \left|[k]^{(e)}\right| = 0$

(3)分块性：

§ 3.2整体刚度矩阵



$$\{F\} = [K]\{a\}$$

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \{a_3\} \\ \{a_4\} \end{Bmatrix}$$

$[K_{ij}]$的意义:

$$
[K]=\begin{bmatrix}
[k_{11}]^{(1)} & \bullet & [k_{12}]^{(1)} & \bullet \\
\bullet & [k_{22}]^{(3)} & \bullet & [k_{21}]^{(3)} \\
[k_{21}]^{(1)} & \bullet & [k_{22}]^{(1)}+[k_{11}]^{(2)} & [k_{12}]^{(2)} \\
\bullet & [k_{12}]^{(3)} & [k_{21}]^{(2)} & [k_{22}]^{(2)}+[k_{11}]^{(3)}
\end{bmatrix}
$$

[K]的特性:

(1)主子块,副子块

(2)相关结点,相关单元 P38, P39

(3)[K]的性质

§3.3支承条件的引入

a.位移为零,如 $u_i = 0$

[K]和{F}进行修改:

$$\{P\}^* = [K]^*\{a\}$$

[K]中与已知位移对应的位置:主对角线的元素改为1,其它元素改为0

{F}中与位移对应的元素改0

b.位移不为零,如 $u_i = u_i^*$

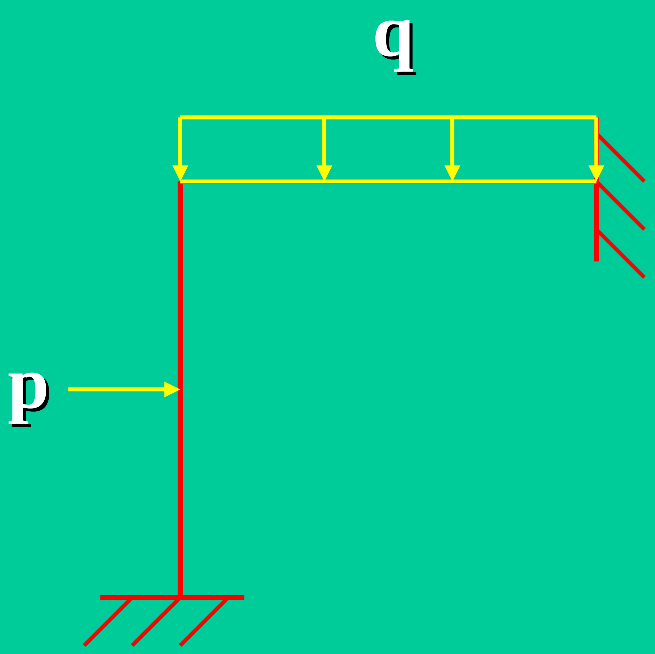
[K]和{F}进行修改:

$$\{P\}^* = [K]^*\{a\}$$

[K]中与已知位移对应的位置:主对角线的元素乘一大数A,其它元素不变.

{F}中对应的元素改为A乘[K]中主对角线的元素再乘 u_i^*

§ 3.4 非结点荷载的处理



1.在局部坐标系下求固端力

$$\left\{\overline{F_0}\right\}^{(e)}$$

2.在公共坐标系下求等效荷载

$$\left\{P_0\right\}^{(e)} = -\left[T\right]^T \left\{\overline{F_0}\right\}^{(e)}$$

3.求整体刚架的等效荷载

$$\left\{P\right\} = \left\{P_0\right\} + \left\{P_d\right\}$$

例题:P48

在整体坐标下 $\{F\} = [K]\{a\}$

总码 $\rightarrow$ 局部码

$$\{P\} = \{P_0\} + \{P_d\} \qquad [k]^{(e)}$$

在局部坐标下

$$\{P_0\}^{(e)} = -[T]^T \{\overline{F_0}\}^{(e)} \qquad [k]^{(e)} = [T]^T [\overline{k}]^{(e)} [T]$$

引入边界条件: $\{P\}^* = [K]^* \{a\}$

可得: $\{a\} \longrightarrow \{\overline{a}\}^{(e)} = [T]\{a\}^{(e)}$

$$\{\overline{F}\}^{(e)} = [\overline{k}]^{(e)} \{\overline{a}\}^{(e)} + \{\overline{F_0}\}^{(e)}$$

作业:

P 50. 3-8 , 3-10 , 3-13

补充内容:

FORTRAN77概述

它是只有一个主程序若干个子程序组成

1.标号区

2.续行区

3.语句区

4.标识区

1.注释行

2.起始行

3.继续行

4.结束行

注意:

主程序:

子程序:

§3.6 杆系结构静力分析程序

试用版

北京工业大学

***SMICAI*课题组**

§3.6 杆系结构静力分析程序

本程序可作以下结构计算:

平面和空间桁架计算(网架视作空间桁架)

多跨梁(静定、超静定)计算

高和不等高三铰拱计算

平面和空间刚架计算

各种组合结构计算

§3.7 程序调试中关键变量的速算方法

2.7.1 总刚度矩阵元素的确定

1) 总刚度矩阵元素的物理意义

整体刚度方程为 $[K][\Delta]=[R]$

如果 $[\Delta]=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \cdots & j & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{array}$，则可见

总刚度矩阵元素K_{ij}的物理意义为：当且仅当 $\Delta_j=1$ 时，在 Δ_i 处所需施加对应于 Δ_i 的广义力。或理解为：当且仅当$\Delta_j=1$时，在限制 Δ_i 位移的约束上所产生的约束反力。

§3.7 程序调试中关键变量的速算方法

2) 指定总刚度矩阵元素的速算方法

根据总刚元素K_{ij}的物理意义，令仅仅产生$\Delta_j=1$，利用位移法中的形常数作弯矩图，象位移法一样即可求得指定总刚元素值，为校核总刚集成的正确性提供测试数据。

注意：（1）要牢记总刚元素的物理意义。
（2）仅仅产生$\Delta_j=1$。
（3）实质上这里纯粹是用位移法来求解。

§3.7 程序调试中关键变量的速算方法

2.7.2 综合等效荷载元素的确定

1) 综合等效荷载元素的组成

综合等效荷载为 $\left[R\right]=\left[P_{\mathrm{d}}\right]+\left[P_{\mathrm{eq}}\right]$

也即，它由直接结点荷载和等效结点荷载组成。

2) 综合等效荷载元素的确定

直接结点荷载只需将外荷载坐标方向投影即可，因此关键是确定等效结点荷载。

由前所知，单元刚度方程和象位移法用叠加所得力-位移关系（转角位移方程）一样，因此

§3.7 程序调试中关键变量的速算方法

只要熟记载常数，即可将单元荷载转化为单元等效结点荷载，再经过往坐标方向的投影，即可获得作用在结点的 $\lfloor \boldsymbol{P}_{\mathrm{eq}} \rfloor$ 元素。由此和直接结点荷载相加即得到需求的综合等效荷载元素。

注意：（1）坐标正向的"荷载"为正。
（2）建议先按载常数确定固端力的实际方向和数值，然后反方向得到等效荷载实际方向(局部坐标方向)。
（3）将所有单元荷载的等效荷载作用到结点，同时考虑直接结点荷载（斜杆需投影）即可得需求值。

§3.7 程序调试中关键变量的速算方法

2.7.3 单元杆端内力元素的确定

1) 单元杆端位移的确定

整体刚度方程求解结果，所得到的是整体坐标下的结点位移，为求单元杆端内力，需作两件事：

从整体位移矩阵中根据定位向量驱除单元位移；

将整体坐标的位移往单元局部坐标方向投影。

这样即可获得单元局部坐标下的单元杆端位移。

2) 由单元刚度方程来求

$$[\overline{F}] = [\overline{k}][\overline{a}] - [\overline{P}] = [\overline{k}][\overline{a}] + [\overline{F}^{G}]$$

“固端力”

可以暂时不讲

运算方法

如果只需求某指定内力，实际并不需要作整个矩阵乘。

3) 由形、载常数叠加来求

按杆端力方程求要作矩阵运算，为避免它，可在获得局部坐标位移后，利用形、载常数通过叠加来得到某指定内力值。

注意：（1）如果要求整体坐标下的内力该怎麽办？

（2）“固端力”符号规定和位移法有区别。

（3）建议用叠加法求。

3.8 几点重要说明

（1）本章方法、思路具有普遍性。特别是整体分析，其方法、结论完全适用于其他有限元分析。

（2）为用有限元分析实际结构，首先要做离散化:建立两套坐标、确定结点、单元、位移编号。此时要注意尽可能使半带宽最小。

（3）有限元分析的关键问题是：建立合适的位移模式。对一般问题可用广义坐标法或试凑法。对杆系问题也可由挠曲线微分方程积分得到形函数。

（4）可用虚位移原理或势能原理进行单元分析。

（5）可用虚位移原理或势能原理进行整体分析.结论是：整体刚度矩阵、综合等效荷载可按定位向量由单元集装得到。“综合=直接+等效”。实质是结点平衡。