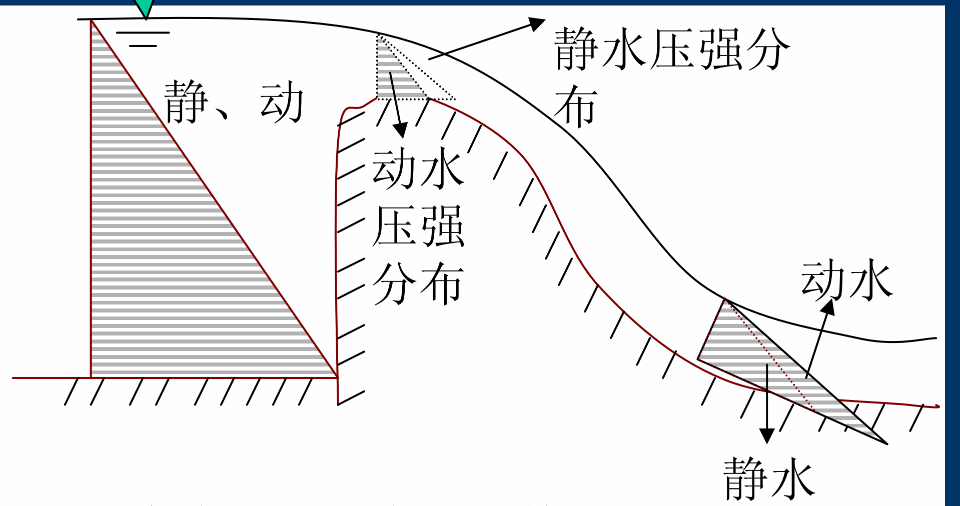
第四章　理想流体动力学和平面势流

§4—0 流体动力学

1、流体动力学（hydrodynamics//fluid dynamics）：

是研究流体运动而涉及力的规律及其在工程中的应用。



急变流、渐变流的静动水压强比较

2、理想流体的动压强与流体静压强一样亦具有两个特性。

一是：动压强的方向总是沿着作用面的内法线方向；

二是：理想流体中任一点的动压强大小与其作用面的方位无关。

§4-1 理想流体的运动微分方程—欧拉运动方程

4-1-1 理想流体的运动微分方程——欧拉运动微分方程

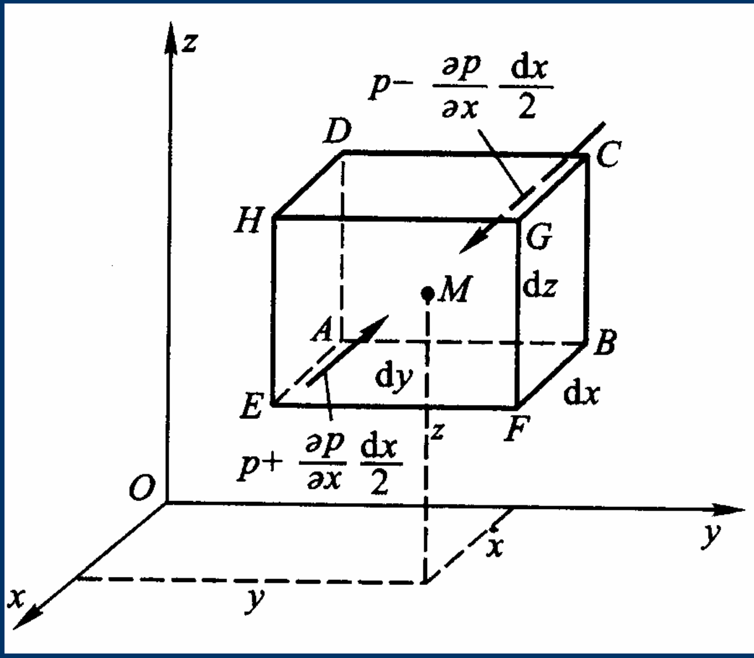
1、用微元分析法推导流体的运动微分方程：

设点M的坐标为x、y、z，压强为p。

x 轴方向受力分析：

利用泰勒级数，$ABCD$和$EFGH$中心点处的压强分别为：

$$p-\frac{dx}{2}\frac{\partial p}{\partial x} \quad 和 \quad p+\frac{dx}{2}\frac{\partial p}{\partial x}$$



表面力为：

$$(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz-(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz$$

质量力为：

$$f_x\rho dxdydz$$

惯性力为：

$$\rho dxdydz\frac{du_x}{dt}$$

根据牛顿第二定律

$$(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz-(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx)dyd+f_x\rho dxdydz=\rho dxdydz\frac{du_x}{dt}$$

化简移项后得

$$f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{du_x}{dt}$$

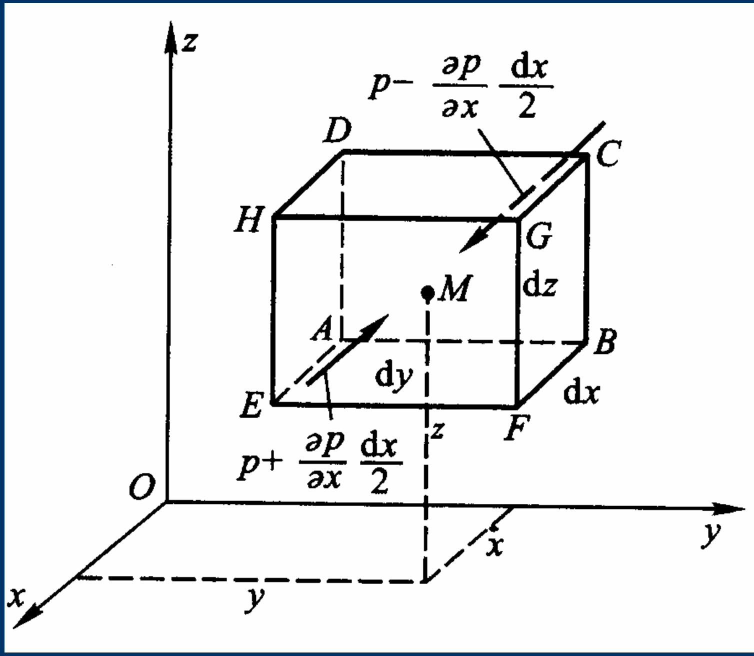
同理：

$$f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{du_y}{dt}$$

和

$$f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{du_z}{dt}$$

----(4-2)



上面三个式的矢量形式为：

$$\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{d\vec{u}}{dt}$$

-----------(4-2)

上式为理想流体的运动微分方程，又称欧拉运动微分方程。

适用范围：恒定流或非恒定流，可压缩流体或不可压缩流体。

2、区分恒定流和非恒定流的欧拉运动微分方程

加速度表示式展开，欧拉运动微分方程写为

$$\left.\begin{aligned} f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\ f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\\ f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad \text{-----------}(4\text{-}3)$$

当恒定流时

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial u_z}{\partial t}=0 \qquad \text{-----------}(4\text{-}3)$$

$$\left.\begin{aligned} f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\ f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\\ f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad \text{-----------}(4\text{-}3)$$

3、欧拉运动微分方程和求解条件

对于不可压缩均质流体来：密度为常数。

微分方程：

$$\left.\begin{aligned}
f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\
f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\\
f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\qquad \text{-----------}(4\text{-}3)$$

方程式中共有八个物理量，ρ 、f_x 、f_y 、f_z 、 u_x 、u_y 、u_z 、 p 。

对于不可压缩均质流体来：密度为常数，单位质量力的分量是已知的。所以只有四个未知数，式（4-3）只有三个方程，还必须有另一方程式，才能求解。

另一方程式为不可压缩均质流体的连续性微分方程式

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \qquad \text{-----------}(3\text{-}22)$$

求解条件：

初始条件：在起始时刻t=0时，各处的流速、压力值；对于恒定流，则不存在条件。

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = u_0(x,y,z)$$

$$p(x,y,z,t)\big|_{t=0} = p_0(x,y,z)$$

边界条件：一般包括固体边界和自由表面等处的运动要素情况。

固体边界： $$u(x,y,z,t)\big|_n = 0$$

自由表面： $$p(x,y,z,t)\big|_\Gamma = p_a(x,y,z,t)$$

对于可压缩均质流体来：密度不为常数。

微分方程：

$$\left.\begin{aligned}
f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\
f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\\
f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{------------(4-3)}$$

方程式中共有八个物理量，ρ 、f_x 、f_y 、f_z 、 u_x 、u_y 、u_z 、 p 。

对于可压缩均质流体来：密度不为常数。有五个未知数，还须另两个方程式。

一个为连续性微分方程式

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \qquad \text{------------(3-22)}$$

一个为状态方程

$$\alpha_P=\frac{d\rho/\rho}{dp} \quad \text{或} \quad \frac{p}{\rho}=RT \qquad \text{------------(1-12, 1-17a)}$$

求解条件:

初始条件：在起始时刻t=0时，各处的流速、压力值；对于恒定流，则不存在条件。

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = u_0(x,y,z)$$

$$p(x,y,z,t)\big|_{t=0} = p_0(x,y,z)$$

边界条件：一般包括固体边界和自由表面等处的运动要素情况。

固体边界: $$u(x,y,z,t)\big|_n = 0$$

自由表面: $$p(x,y,z,t)\big|_\Gamma = p_a(x,y,z,t)$$

4、在柱坐标系中，理想流体的运动微分方程

$$\left.\begin{aligned}
f_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}&=\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\\
f_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta}&=\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\\
f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_z}{r\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{----------}(4\text{-}4)$$

式中：f_r、f_θ、f_z 分别为单位质量力在 r,θ,z 坐标轴上的分量。

4-1-2 葛罗米柯(又称兰姆)运动微分方程

欧拉运动微分方程变化为区分有势流、有涡流的运动微分方程。

将 $\pm u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$ 和 $\pm u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial x}$ 加到(4-3)第一式等号的右边，整理为：

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) + u_y\frac{\partial u_y}{\partial x} - u_y\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial x} - u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} - u_y\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} - u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2}{2} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2}\right) + u_y\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + u_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2}\right) + 2u_y\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + 2u_z\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) - 2(u_y\,\omega_z - u_z\omega_y)$$

将方程组(4-3)第二式、第三式作类似的处理，则欧拉运动微分方程可写为

$$\left.\begin{aligned} f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2})-\frac{\partial u_x}{\partial t}=2(u_z\omega_y-u_y\omega_z) \\ f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{u^2}{2})-\frac{\partial u_y}{\partial t}=2(u_x\omega_z-u_z\omega_x) \\ f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{u^2}{2})-\frac{\partial u_z}{\partial t}=2(u_y\omega_x-u_x\omega_y) \end{aligned}\right\} \quad \text{------}(4\text{-}5)$$

称葛罗米柯运动微分方程，又称兰姆**(Lamb)**运动微分方程。

4-1-3 理想流体运动微分方程的积分•伯努利方程(能量方程)

1、 伯努利方程的推导：

满足下列条件下：

（**1**）流体是不可压缩均质的理想流体，密度为常数；则 $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{p}{\rho})$

（**2**）质量力是有势的；则 $f_{x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}(W)$

（**3**）恒定流；则 $\frac{\partial u_{x_i}}{\partial t}=0$

理想流体运动微分方程简化为：

$$d\left(W-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=2\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \qquad \text{-------}(4\text{-}9)$$

（4）行列式为零。

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}=0$$

具备下列条件的流体运动：
静止流体，　有势流，　流线方程，
涡线方程，　螺旋流

（4-9）式积分后得

$$W-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}=const \qquad \text{-----------}(4\text{-}10)$$

上式为不可压缩均质理想流体恒定流的运动方程，又称伯努利方程(**Bernoulli equation**)。

2、伯努利方程的物理内涵：

伯努利方程是说明能量守恒(**conservation of energy**)概念的，因此又称能量方程(**energy equation**)。

它说明在流场中任一点单位质量流体的位势能 ***W***、压势能 ***p/ρ*** 和动能（**kinatic engergy**） $u^2/2$ 的总和保持一常数值，而这三种机械能(**mechanical energy**)可以相互转化。

3、伯努利方程的应用条件：

（1）流体是不可压缩均质的理想流体，密度 常数；
（2）作用于流体上的质量力是有势的；
（3）流体运动是恒定流；
（4）行列式 =0；具备下列条件的流体运动，都能满足要求，即：

$u_x = u_y = u_z = 0$ 为静止流体。它说明适用于静止流体。

$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ 为有势流。它说明适用于整个有势流，即流场中所有各点的总机械能保持不变，不限于在同一条流线上。

$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$ 为流线方程。它说明)适用于有涡流，但限于同一条流线上各点的总机械能保持不变；不同流线上各点的总机械能则是不同的。这和有势流的情况不同。

$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$ 为涡线方程。它说明适用于有涡流，但限于同一条涡线上各点。

$\frac{u_x}{\omega_x} = \frac{u_y}{\omega_y} = \frac{u_z}{\omega_z}$ 为螺旋流。螺旋流是以流线和涡线相重合为特征，流体质点沿流线移动，在移动过程中又围绕流线转动。如同在有势流中一样，适用于整个螺旋流。

1．绝对运动（重力作用下）的伯努利方程

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=const \qquad \text{------------}(4\text{-}11)$$

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{u_2^2}{2g} \qquad \text{------------}(4\text{-}12)$$

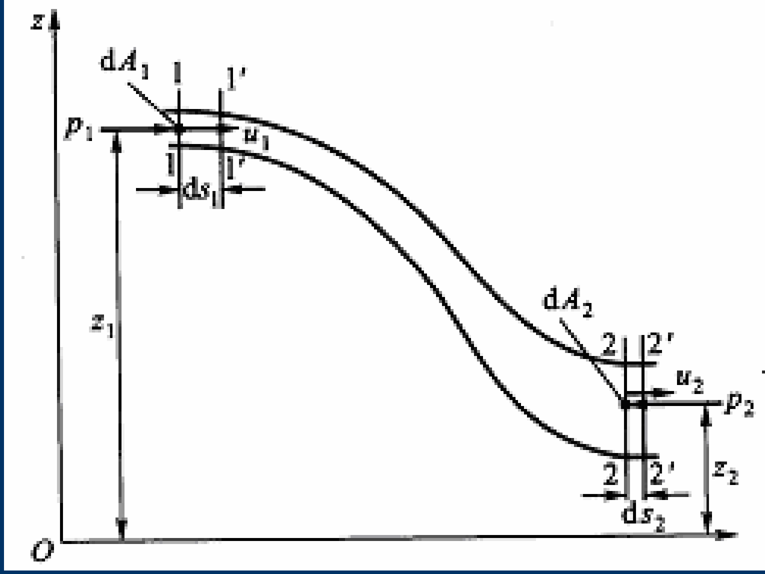
它说明在流场中任一点单位质量流体的位势能 **W**、压势能 **$p/\rho g$**和动能 **$u^2/2g$** 守恒。

4-2 理想流体元流的伯努利方程

4-2-1理想流体元流的伯努利方程

1、用元流分析法推导出不可压缩均质理想流体恒定元流的伯努利方程：

动能定理：某一运动物体在某一时段内的动能增量，等于在该时段内作用于此物体上所有的力所做的功之和。



元流段的动能增量：

$$\rho dA_2 u_2 dt\frac{u_2}{2}-\rho dA_1 u_1 dt\frac{u_1}{2}=\gamma dQdt\left(\frac{u_2^2}{2g}-\frac{u_1^2}{2g}\right)$$

重力所作的功为：

$$\rho g dA_1 ds_1 dt z_1-\rho g dA_2 ds_2 dt z_2=\gamma dQdt(z_1-z_2)$$

压力所作的功为：

$$p_1 dA_1 u_1 dt-p_2 dA_2 u_2 dt=dQdt(p_1-p_2)$$

根据动能定理

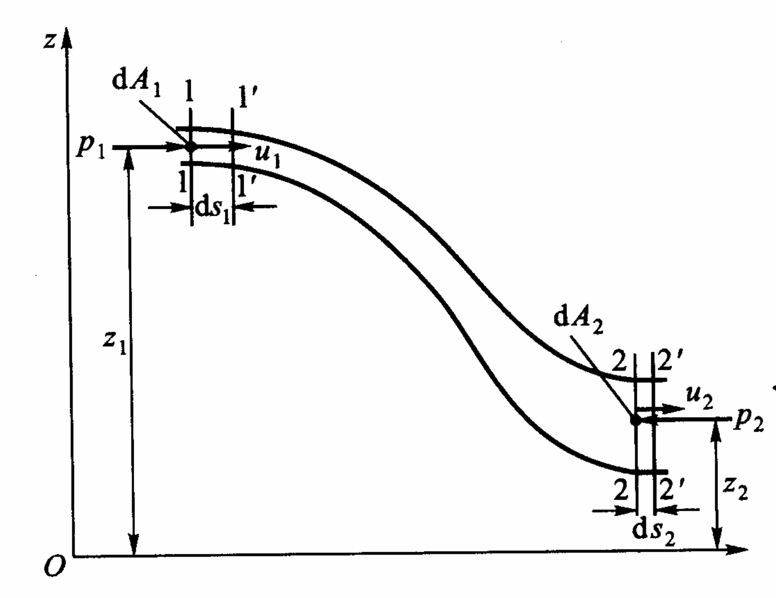
$$\gamma dQdt\left(\frac{u_2^2}{2g}-\frac{u_1^2}{2g}\right)=\gamma dQdt(z_1-z_2)+dQdt(p_1-p_2)$$

得：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{u_2^2}{2g} \qquad \text{-----------(4-18)}$$

4-2-2 理想流体元流伯努利方程的物理意义和几何意义

1、理想流体元流伯努利方程的物理意义



z 是元流过流断面上单位重量流体从某一基准面算起所具有的位能，称单位位能。

$p/\rho g$ 是元流过流断面上单位重量流体从某一基准面算起所具有的压能，称单位压能。

$z+p/\rho g$ 是元流过流断面上单位重量流体从某一基准面算起所具有势能，称单位势能。

$u^2/2g$ 是元流过流断面上单位重量流体所具有的动能（**kinetic energy**），称单位动能。

$$\frac{u^2}{2g}=\frac{\frac{mu^2}{2}}{mg}$$

物理意义：元流各过流断面上单位重量流体所具有的总机械能(位能、压能、动能之和)沿流程保持不变；同时，亦表示了元流在不同过流断面上单位重量流体所具有的位能、压能、动能之间可以相互转化的关系。

2、理想流体元流伯努利方程的几何意义

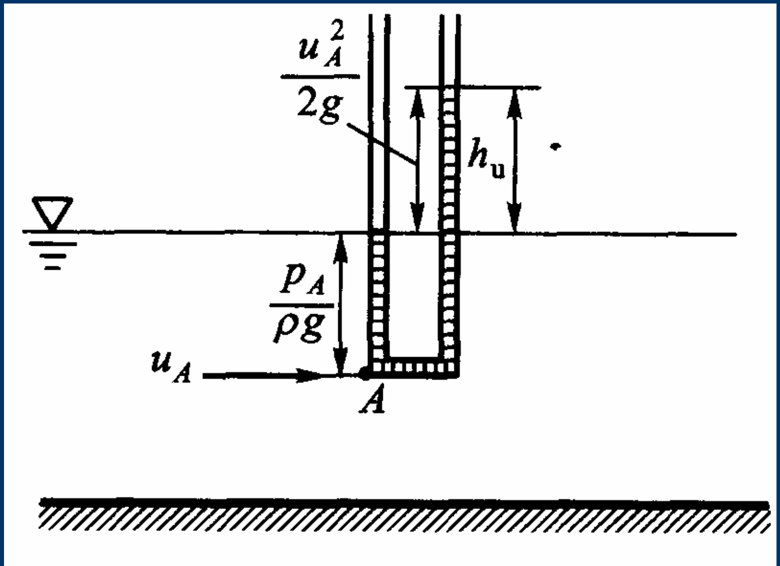
z 是位置水头。

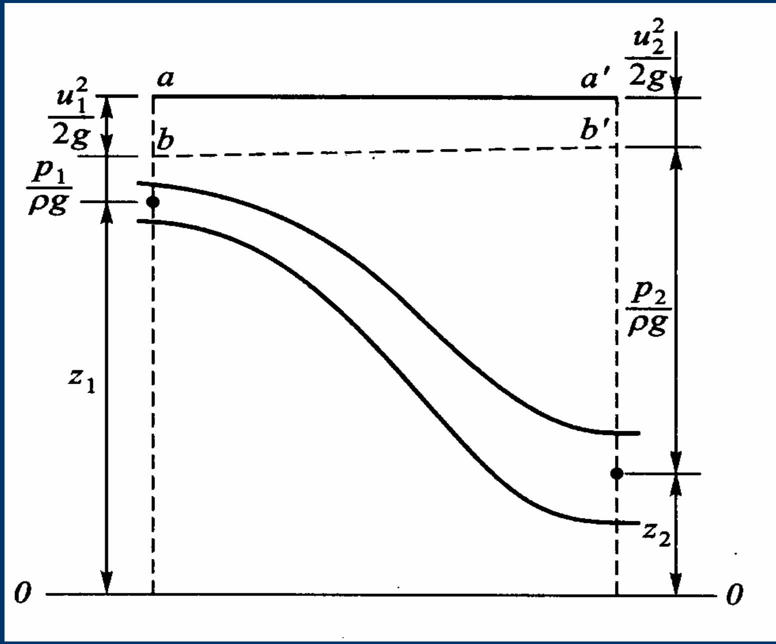
$p/\rho g$ 是压强水头。

$z+p/\rho g$ 是测压管水头。

$u^2/2g$ 是速度水头(vvelocity head)。

$$\frac{u^2}{2g}=h_a$$



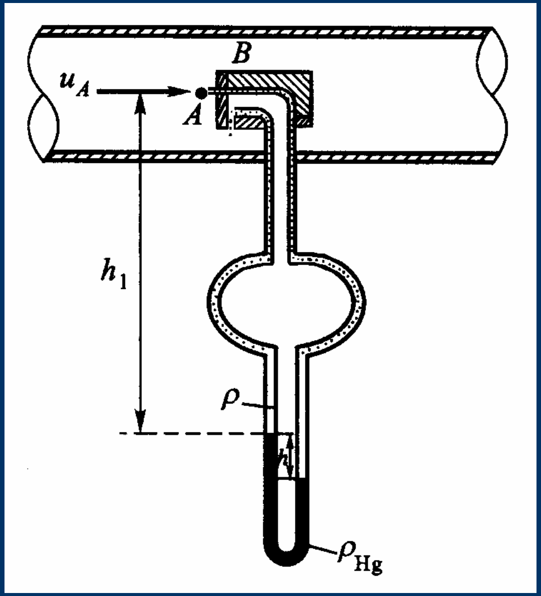


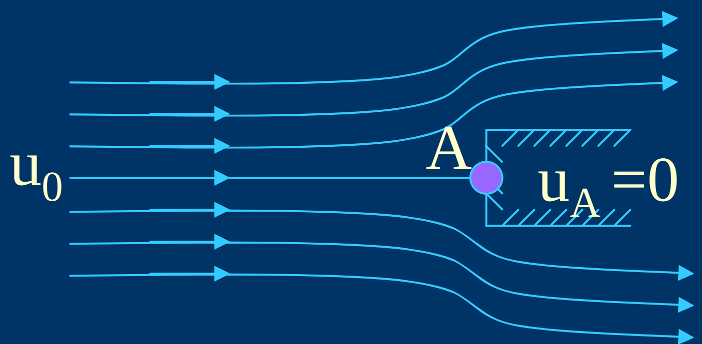
几何意义：对于液体来说，元流各过流断面上总水头H(位置水头、压强水头、速度水头之和)沿流程保持不变；

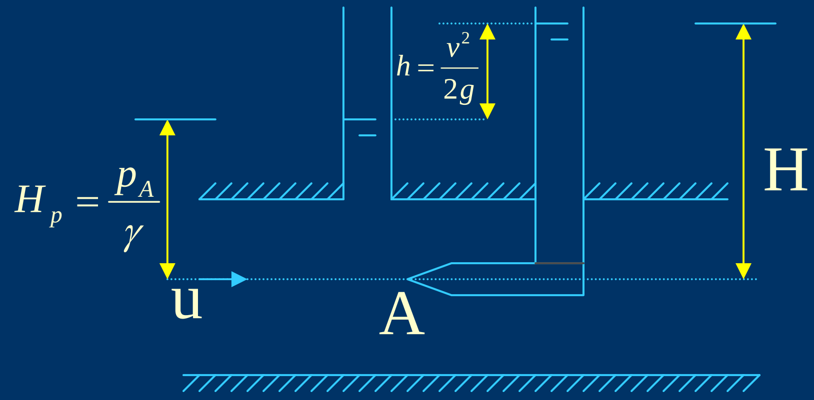
同时，亦表示了元流在不同过流断面上位置水头、压强水头、速度水头之间可以相互转化的关系。

4-2-3 皮托管

常用的是由装有一半圆球探头的双层套管组成，并在两管末端联接上压差计，如图所示。探头端点A处开一小孔与内套管相连，直通压差计的一肢；外套管侧表面沿圆周均匀地开一排与外管壁相垂直的小孔(静压孔)，直通压差计的另一肢。测速时，将皮托管放置在欲测速度的恒定流中某点A，探头对着来流，使管轴与流体运动的方向相一致。流体的速度接近探头时逐渐减低，流至探头端点处速度为零。







由伯努利方程，得

$$\frac{p_S}{\gamma} = \frac{u_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma}$$

整理：得

$$p_S = p_A + \frac{1}{2}\rho u_A^{\ 2}$$

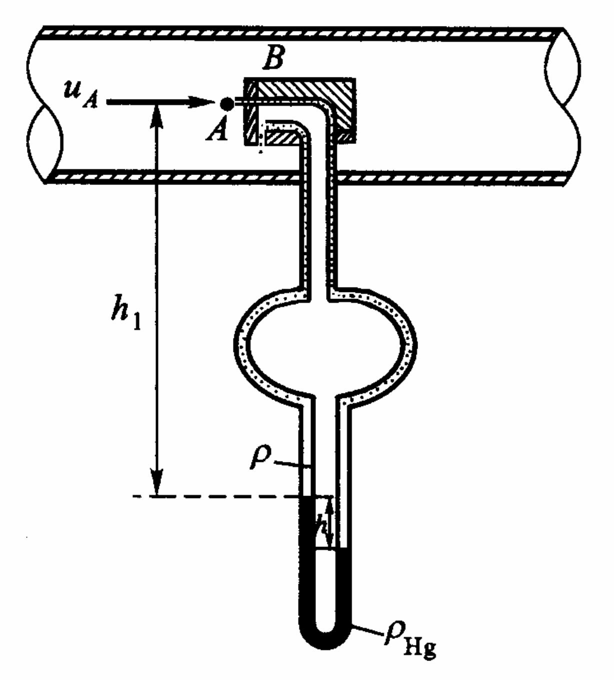
式中：　p_A、u_A分别为A点处在皮托管放入前的压强和速度。

p_A　为静压（static pressure）、

$\frac{1}{2}\rho u_A^2$　为动压(kineticpressure)、

p_s　为全压或总压(total pressure)。

$$u_A = \sqrt{\frac{2(p_S - p_A)}{\rho}}$$



4-3 恒定平面势流

4-3-0　有势流近似处理条件

将流体运动分为有势流和有涡流。严格讲，实际流体的运动都不是有势流，只有理想流体的运动才有可能是有势流。因为理想流体没有粘性，不存在切应力，不能传递旋转(转动)运动；它既不能使不旋转的流体微元产生旋转，也不能使已旋转的流体微元停止旋转。

实际流体的运动由于粘性的作用，可以使没有旋转的流体微元发生旋转；亦可使有旋转的削弱乃至消除旋转。实际流体的运动只有在切应力比其他作用力小到可以忽略不计的情况，才可作为理想流体来处理，有可能按有势流来求得近似解。

例如：通风车间用抽风的方法使工作区出现风速，工作区的空气即从原来的静止状态过渡到运动状态，就是有势流。所以一切吸风装置所形成的气流可以按有势流处理。

例如：利用风管通过送风口向通风地区送风，空气受管壁的摩擦作用，在风管内是有涡流，进大通风地区后又以较高的速度和静止空气发生摩擦，维持为有涡流，则不能按有势流处理。

例如：地下水的流动(渗流)、边界层外的流体运动、流经闸孔的水流等亦常视为有势流。

解决实际流体运动，是将流场划分为两个区间：

一个是紧靠固体边界的粘性起作用的区间，用粘性流体边界层理论；一个是不受固体边界阻力影响的、粘性不起作用的区间用无粘性(理想)流体势流理论。

恒定平面势流（steady plane potential flow）基本方程组（不可压缩恒定二元势流）：

平面无旋，即 $\omega_z = 0$

恒定流，即 $\dfrac{\partial u_x}{\partial t} = \dfrac{\partial u_y}{\partial t} = 0$

不可压缩流体，即 $\rho = Const$

运动方程

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

连续性方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

4-3 恒定平面势流

4-3-1 速度势的性质

恒定势流中必然存在速度势(velocity potential)函数 ϕ (*x*、*y*、*z*)，满足：

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

例：设流场中的速度分布为 $u_x = u$ =常数，$u_y = 0$。现讨论其运动。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u_x = u , \frac{\partial \phi}{\partial y} = u_y = 0$$

由（3-40）：

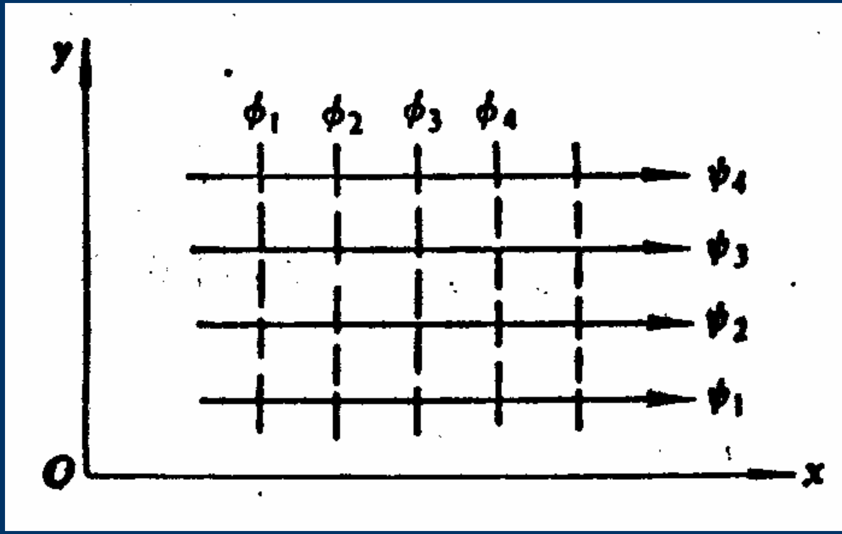
$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

$$d\phi = udx + 0dy = udx$$

得速度势：

$$\phi = ux$$

为平行*y*轴直线

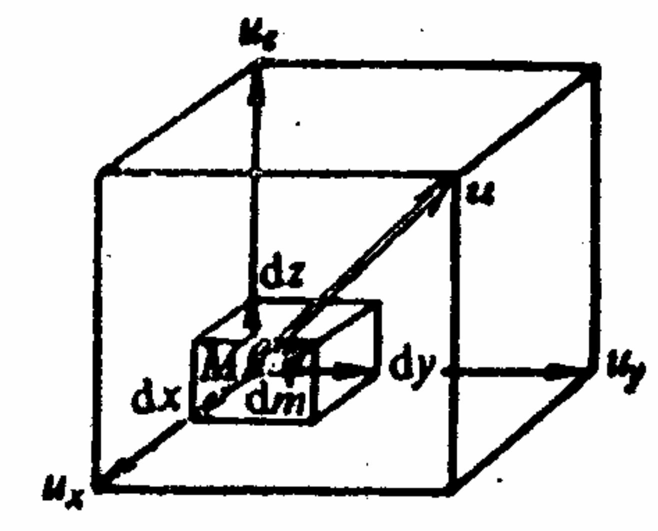


1、速度势 对任意方向 **m** 的偏导数，等于速度 **u** 在该方向的速度分量 $\mathbf{u_m}$ 。

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial m}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial m}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos(m,x)+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos(m,y) \qquad \text{-----------}(4\text{-}20)$$

$$=u_x\cos(m,x)+u_y\cos(m,y)$$

$$=u\cos(\mathbf{u},m)=u_m$$



2、速度势值相等的点所连成的空间曲面称等势面**(equipotential line)**，与流线相正交，即为过流断面。

$$d\phi=u\cdot dl=0$$

3、速度势值沿流线 **s** 方向增大。

$$d\phi=uds \qquad \text{-----------}(4\text{-}24)$$

4、速度势满足拉普拉斯方程，是调和函数。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\nabla^2\phi=0 \qquad \text{-----------}(4\text{-}26)$$

意义：平面势流的问题就归结为在特定的边界条件下解拉普拉斯方程，把解两个未知函数 u_x 、u_y (或 u_r 、u_θ)的问题变为解一个未知函数 ϕ 的问题。

从数学处理上来讲，确定一个未知函数要比确定两个未知函数简单得多。如果能求得速度势 ϕ 就可求出各点速度在各坐标轴方向的分量及各点速度，亦就求得了速度场；再应用伯努利方程，就可求得压强场。

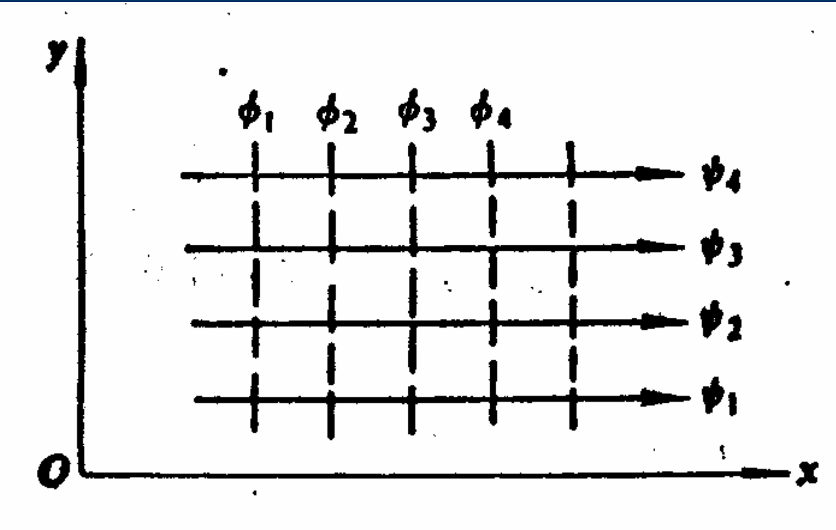
4-3-2 流函数及其性质

流体平面运动(不一定是势流)的流线方程为： $$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}$$

所以 $$u_x dy-u_y dx=0 \qquad ----------(4-28)$$

不可压缩均质流体平面运动的连续性方程为：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$$



存在函数 **Ψ(x，y)**的全微分：

$$d\psi=u_x dy-u_y dx$$

并且 $$u_x=\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad ,u_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

函数 **Ψ(x，y)**称流函数（**stream function**）。

例：设流场中的速度分布为u_x=u=常数，u_y=0。现讨论其运动。

$$d\psi=u_x dy-u_y dx=udy$$

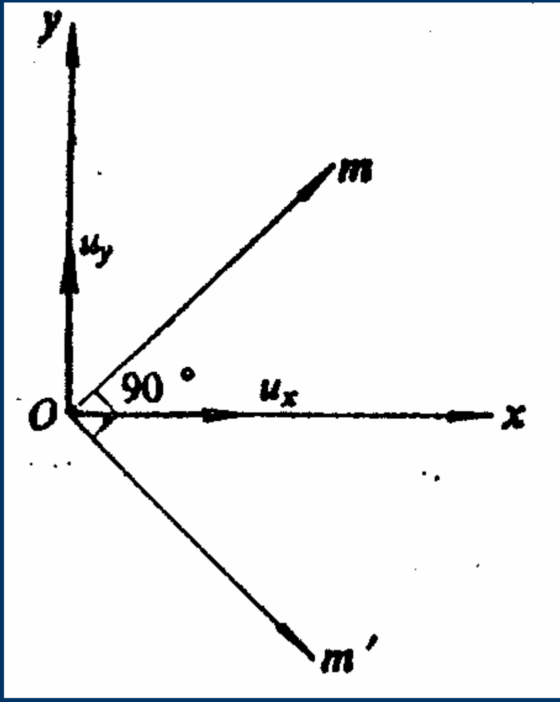
得流函数： $$\psi=uy$$

为平行*x*轴直线

1、流函数 ψ 对任意方向 m 的偏导数，等于速度u在该方向顺时针旋转 90° 后的 m'方向的速度分量u_m'

$$\frac{\partial\psi}{\partial m}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial m}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial m}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(m,x)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(m,y) \quad \text{-----------(4-33)}$$

$$=-u_y\cos(m,x)+u_x\cos(m,y)=u'_m$$



2、流函数值相等的点连成的曲线称等流函数线，即为流线；或者说，同一流线上的流函数相等。

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=u_x dy-u_y dx=0$$

3、流函数值沿流线s方向逆时针旋转 90° 后n的方向增大。

$$d\psi=udn \quad \text{-----------(4-35)}$$

4、任意两条流线的流函数值之差 ($\psi_2-\psi_1$)，等于该两条流线间所通过的单宽流量q。

$$q=\int_1^2 udn=\int_{\psi_1}^{\psi_2}d\psi=\psi_2-\psi_1 \quad \text{-----------(4-37)}$$

4、平面势流的流函数满足拉普拉斯方程，是调和函数。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nabla^2\psi=0 \quad \text{-----------(4-26)}$$

意义：求出流函数，即可求得任一点的两个速度分量，这样就简化了分析的过程。

适用范围：无旋流、有旋流、实际流体、理想流体的不可压缩 流体的平面流动。

4-3-3 流函数与速度势的关系

1、流函数与速度势为共轭函数

$$u_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\qquad u_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\qquad \text{------------(4-40)}$$

上式是联系流函数与速度势的一对很重要的关系式，在数学分析中称柯西-黎曼条件，满足这种关系的两个函数成为共轭函数。

2、等流函数线与等速度势线互相垂直，即流线与等势线互相垂直。

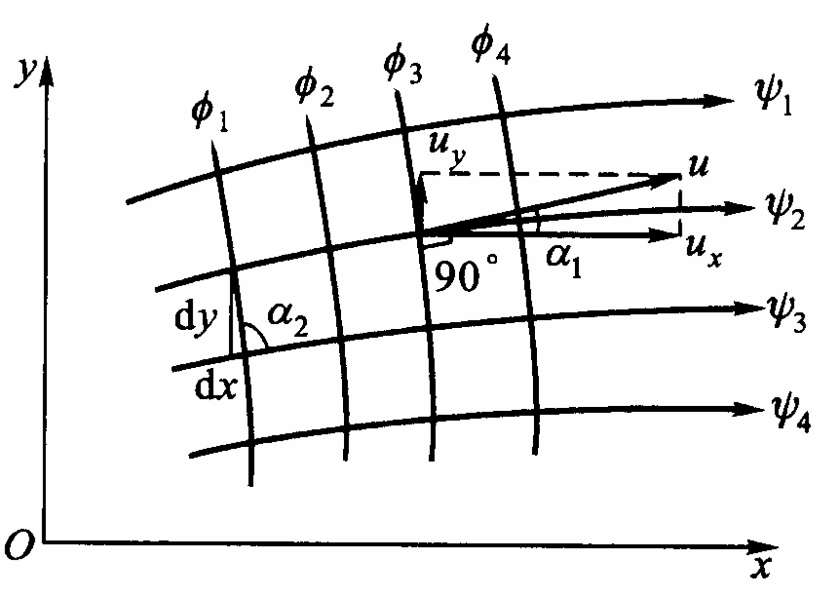
因为 $d\psi=-u_y dx+u_x dy=0$

所以 $m_1=\frac{dy}{dx}=\frac{u_y}{u_x}$

因为 $d\phi=u_x dx+u_y dy=0$

所以 $m_2=\frac{dy}{dx}=-\frac{u_x}{u_y}$

则得 $m_1 m_2=-\frac{u_x}{u_y}\cdot\frac{u_y}{u_x}=-1$



两直线垂直的条件是它们的斜率的乘积等于-1，这就证明了流线与等势线互相垂直。

4-3-4 流网及其绘制

1、流网及其性质

在恒定平面势流中，由一族等流函数线，即一族流线和一族等势线所组成的正交网格，称**流网(flow net)**。

(1)组成流网的流线与等势线互相垂直，即等流函数线与等势线互相垂直。

(2)流网中每一网格的边长之比 $\dfrac{ds}{dn}$，等于速度势Φ与流函数Ψ的增值 $\dfrac{d\phi}{d\psi}$ 之比；如取**dΦ＝dΨ**，则网格成正方形。

因为 $d\phi = uds$

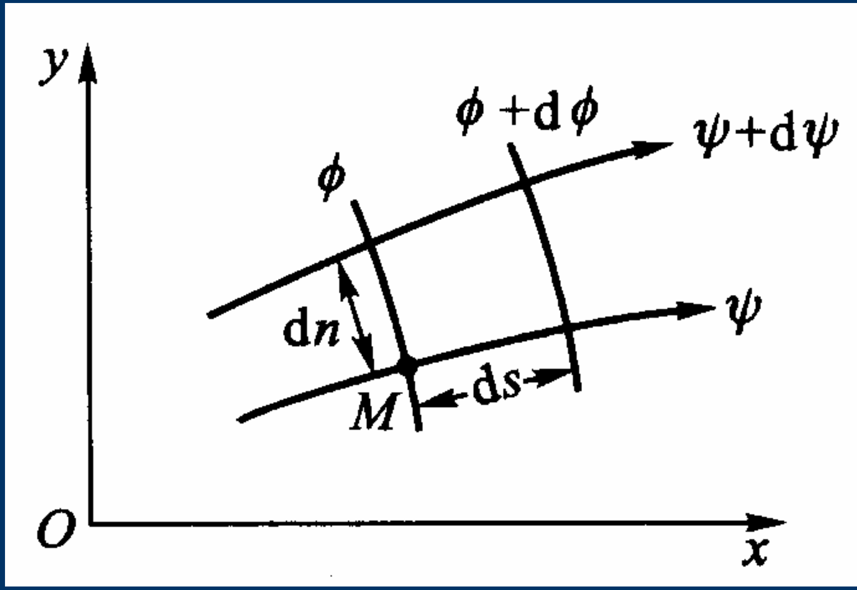
和 $d\psi = udn$

则得

$$\frac{ds}{dn} = \frac{d\phi}{d\psi} \qquad \text{-----(4-41)}$$

差分式

$$\frac{\Delta s}{\Delta n} = \frac{\Delta \phi}{\Delta \psi} \qquad \text{-----(4-42)}$$



根据上述流网的两个性质，即可绘制流网，求得流场的速度分布和压强分布。

(1)任何网格中的速度分布(distrbution of velocity)为

$$u=\frac{\Delta\psi}{\Delta n}=\frac{\Delta q}{\Delta n} \qquad ------(4\text{-}43)$$

各网格中的两处的速度之比为

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} \qquad ------(4\text{-}44)$$

在流网中可以直接量出各处的Δ**n**，根据上式就可得出速度的相对变化关系。如有一点的速度为已知，就可按上式求得其他各点的速度。

$$d\phi=uds$$

当两条流线的间距愈大，则速度愈小；若间距愈小，则速度愈大。所以流网图形可以清晰地表示出速度分布的情况。

（2）流场中的压强分布

当两点位置高度z_1和z_2为已知，速度u_1和u_2已通过流网求出，则两点的压强差为

$$\frac{p_1-p_2}{\gamma}=\frac{\Delta p}{\gamma}=z_2-z_1+\frac{u_2^{\ 2}-u_1^{\ 2}}{2g}$$

2、流网的绘制

（1）首先要确定边界条件，一般有固体边界、自由表面、人流断面和出流断面的边界条件等。

（2）固体边界是一流线，称边界流线，等势线与它垂直。

（3）自由表面是一边界流线，等势线与它垂直 。

(4)入流断面和出流断面的部分流动条件应该是已知的，根据已知条件可以确定这些断面上的等势线和流线的位置。人流断面和出流断面与平行平面的交线是等势线，称边界等势线。

在绘制流网时，一般的步骤可以如下

（1）先用铅笔在图纸上按一定的比例绘出流动边界，根据边界条件定出边界流线和边界等势线。

（2）先绘流线，再绘等势线。边界等势线的流线的间距应相等。

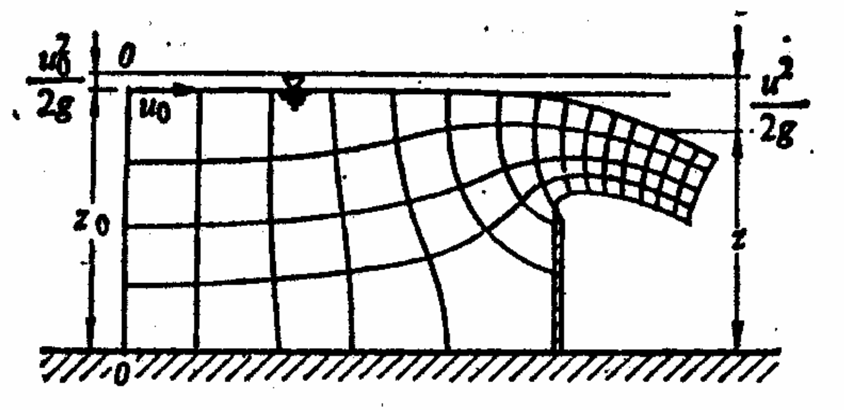


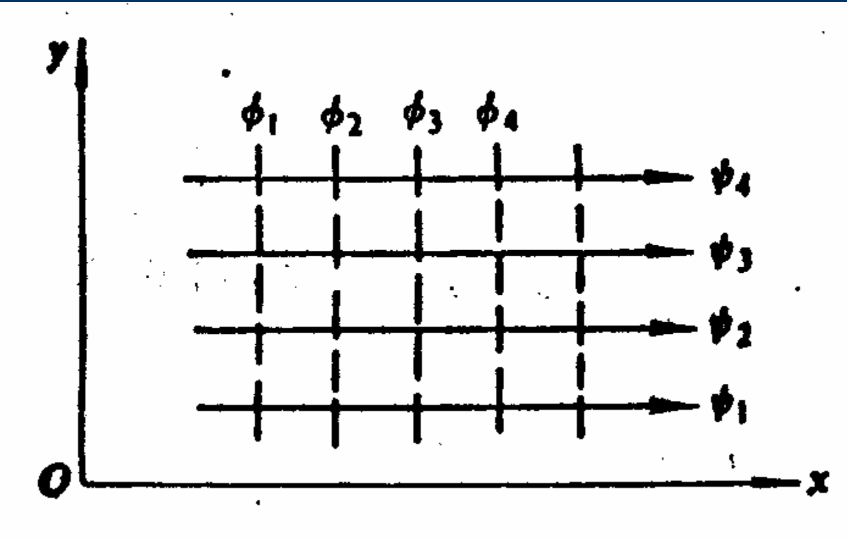
图 4-15

4-3-5 简单平面势流

1、均匀直线流

实例：均匀直线流绕过顺流放置的无限薄平板。

设流场中的速度分布为 $u_x=u=$常数 ，$u_y=0$ 。



由流函数公式积分，得

$$\psi = uy \qquad \text{------}(4\text{-}45)$$

由势函数公式积分，得

$$\phi = ux \qquad \text{------}(4\text{-}46)$$

上述的流函数Ψ和速度势φ都是单值函数。都满足拉普拉斯方程。

等流函数线和等势线的分布图，如图所示。

由于流场中各点的速度都相同，根据伯努利方程式可得，

$$z+p/\rho g=\text{常数}$$

如果均匀直线流是在水平面内，或者重力的影响可以忽略不计(如气体)，则

$$p=\text{常数}$$

即在流场中压强值处处都相等。

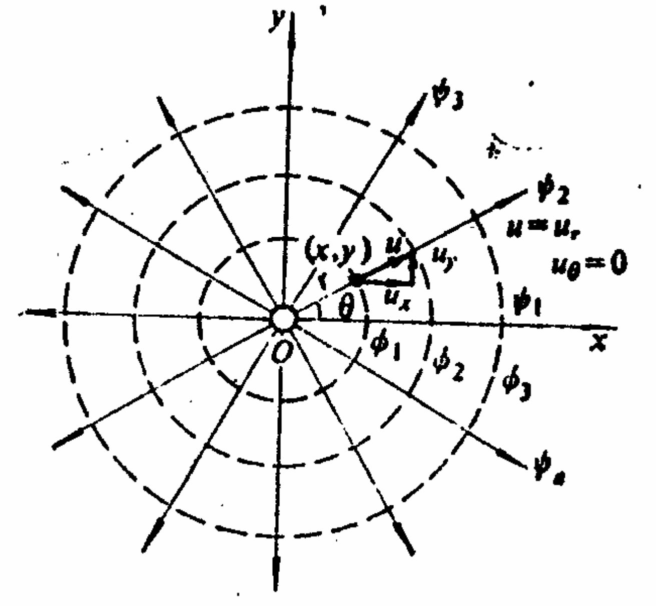
2、源流和汇流

（1）源流运动

实例：泉眼向各方的流动，离心式水泵叶轮内的流体运动。

设在水平的无限平面内，流体从某一点**O**沿径向直线均匀地向各方流出，这种流动称源流，**O**点称源点。

设流场中的速度分布为 $u_r = \dfrac{q}{2\pi r}$ ， $u_\theta = 0$ ------(4-47)



式中：**q**为沿**z**轴方向的单位长度上所流出的流量，称源流强度。

由流函数公式积分，得

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta = \frac{q}{2\pi} arctg\frac{y}{x} \qquad ------(4-50)$$

由势函数公式积分，得

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\ln r = \frac{q}{2\pi}\ln(x^2+y^2) \qquad ------(4-51)$$

源流的流函数Ψ和速度势Φ，都满足拉普拉斯方程。

等流函数线是一族从原点出发的径向射线；等势线是一族圆心位于坐标原点的不同半径的同心圆。

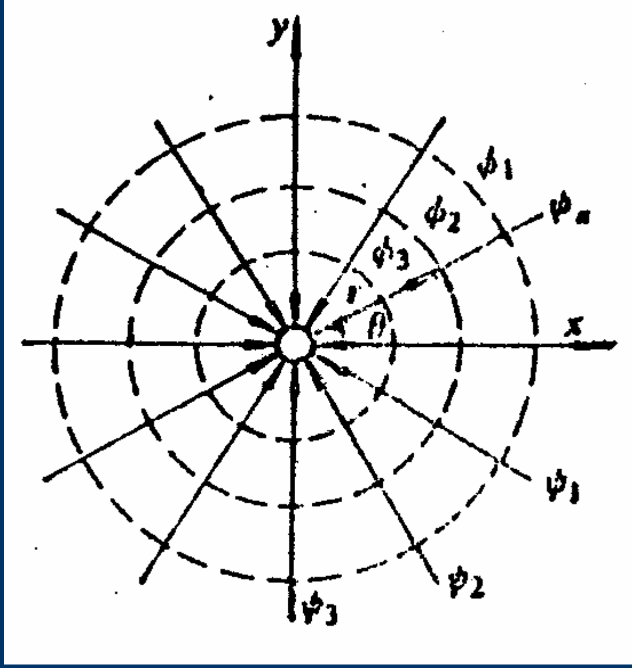
（2）汇流运动

实例：地下水向井中的流动。

设在水平的无限平面内，流体沿径向直线均匀地向某一点O流入，这种流动称汇流，O点称汇点。

设流场中的速度分布为 $u_r = -\dfrac{q}{2\pi r}$， $u_\theta = 0$ ------(4-52)

式中：q为沿z轴方向的单位长度上所流入的流量，称汇流强度。



由流函数公式积分，得

$$\psi = -\frac{q}{2\pi}\theta = -\frac{q}{2\pi} arctg\frac{y}{x} \qquad \text{------(4-53)}$$

由势函数公式积分，得

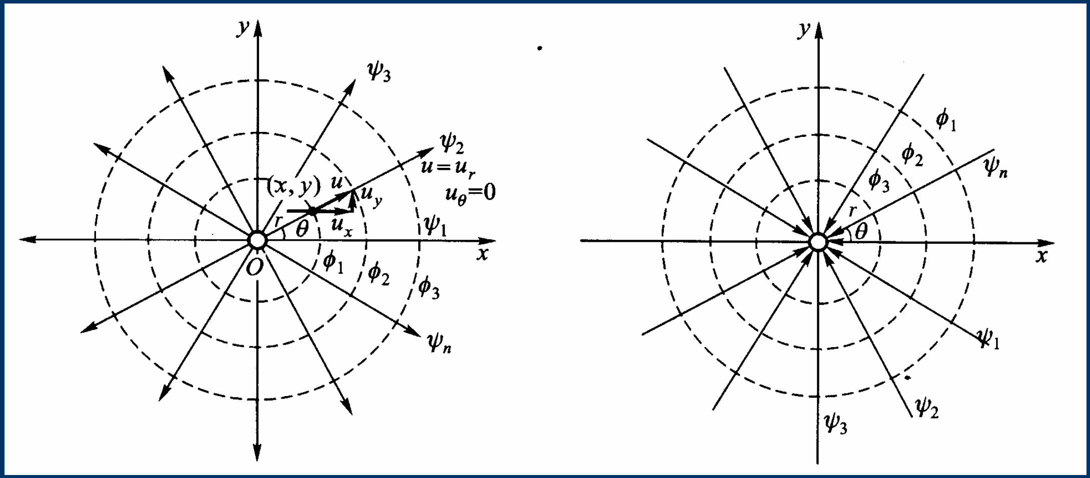
$$\phi = -\frac{q}{2\pi}\ln r = -\frac{q}{2\pi}\ln(x^2 + y^2) \qquad \text{------(4-54)}$$

源流的流函数Ψ和速度势Φ，都满足拉普拉斯方程。

等流函数线是一族从原点汇入的径向射线；等势线是一族圆心位于坐标原点的不同半径的同心圆。

源流的流函数Ψ讨论

$$\psi = \pm \frac{q}{2\pi}\theta = \pm \frac{q}{2\pi} arctg \frac{y}{x}$$



源流和汇流的流函数Ψ并不是单值的，因为从 θ=0出发回转一圈到起始点，这时的 θ 值并不等于零而是等于2π，因此流经包围源(或汇)点的任何封闭曲线上的流量并不等于零。

因为当r=0时，源流或汇流的速度势φ和速度u_r均为正无穷大或负无穷大，源点或汇点是奇点，所以速度势和速度的表示式只有在源点或汇点以外才能使用。

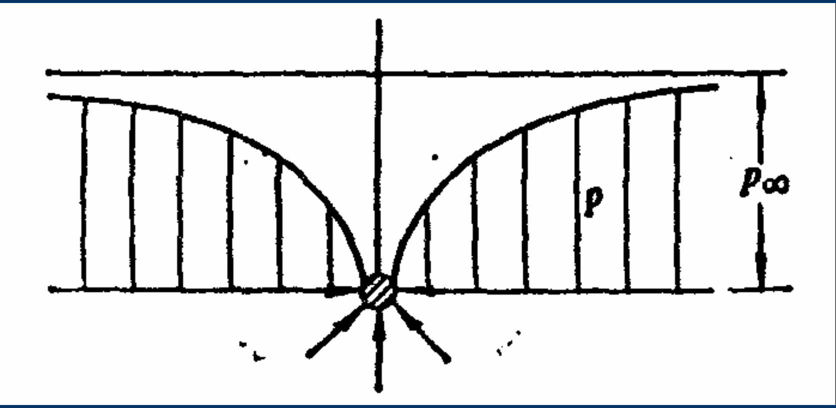
由于源点或汇点是速度不连续的点，所以流经包围源点或汇点的任何封闭曲线上的流量都等于q。

（3）源流运动的压强

源流或汇流的压强分布可应用伯努利方程式求得，当流动是在水平面内进行时。

$$p = p_\infty - \frac{q^2\gamma}{8\pi^2 g}\frac{1}{r^2} \qquad \text{------(4-56)}$$

式中 p_∞ 是 $r=\infty$ 、$u_r=0$ 处的流体压强。



当 $r = r_0 = -\left[\dfrac{q^2\rho}{8\pi^2 p_\infty}\right]^{1/2}$ 时，

$$p = 0$$

当$\mathbf{r_0}<\mathbf{r}<\infty$和$-\infty<\mathbf{r}<-\mathbf{r_0}$时，压强 $\boldsymbol{p}$ 随半径**r**的减小而降低；

当 r =0 时，$\boldsymbol{p}=-\infty$，这是不可能的，这亦说明源点或汇点是奇点。

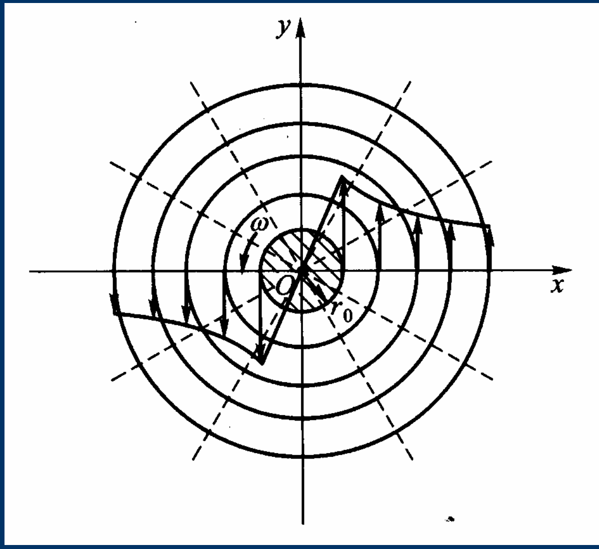
2、环流（circulation）

实例：自然界中龙卷风；工业设备装置，如离心式水泵、离心式除尘器等。

（1）环流运动

设在流场中，有一半径为r_0、沿z轴方向为无限长的固体圆柱体，绕其中心轴以等角转速ω旋转。由于柱体的旋转，使柱体外的流体也绕柱体中心轴作旋转运动。流体质点运动速度的大小与半径成反比，流线是以柱体中心轴为中心的同心圆。

设流场中的速度分布为 $u=u_\theta=\dfrac{k}{r}$ ， $u_r=0$ ------(4-57)



式中：**k**是不为零的数。当$r=r_0$时，$u=\omega r_0$，则 $k=\omega r_0^2$，则

$$u=\frac{\omega r_0^2}{r} \qquad \text{------(4-58)}$$

当**r=0**时，$u_x=-\infty$，$u_y=\infty$，坐标原点是点，是速度不连续的点。除原点外，环流存在流函数和速度势。

沿包围原点的任何封闭曲线(半径为r的流线)的速度环量Γ，称环流强度为

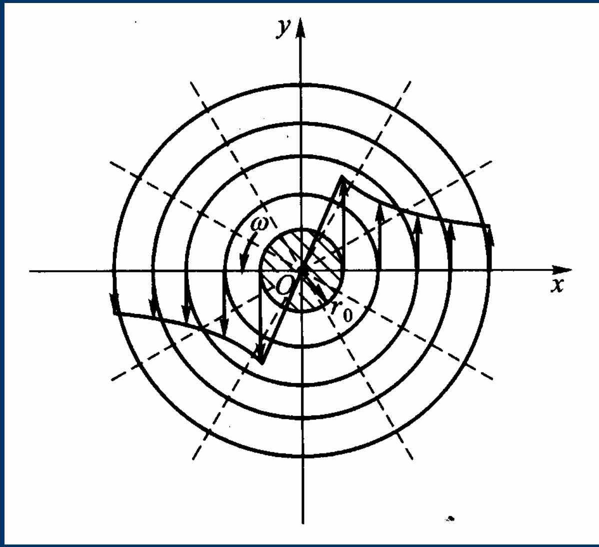
$$\Gamma=2\pi\omega r_0^2 \qquad \text{------(4-60)}$$

上式表明：速度环量Γ与 r 无关，为一常数。速度环量不为零，是由于线积分曲线包围奇点在内的原因，所以除原点外，环流才是势流。

速度分布为：
$$u_\theta=\frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad \text{------(4-63)}$$

由流函数公式积分，得

$$\psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \qquad \text{------}(4\text{-}61)$$



由势函数公式积分，得

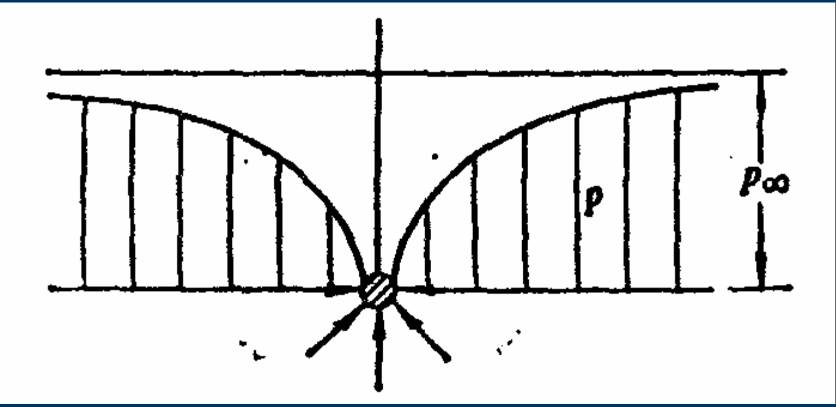
$$\phi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad \text{------}(4\text{-}62)$$

当Γ >**0**时，环流按逆时针方向运动。等流函数线**(**流线**)**是一族以原点为中心的同心圆；等势线是一族从原点出发的径向射线 。

（2）环流运动的压强

环流压强分布可应用伯努利方程式求得，当流动是在水平面内进行时。

$$p=p_{\infty}-\frac{\Gamma^2\gamma}{8\pi^2 g}\frac{1}{r^2} \qquad \text{------}(4\text{-}67)$$



式中 p_{∞} 是 $r=\infty$ 、$u_{\theta}=0$处的流体压强。

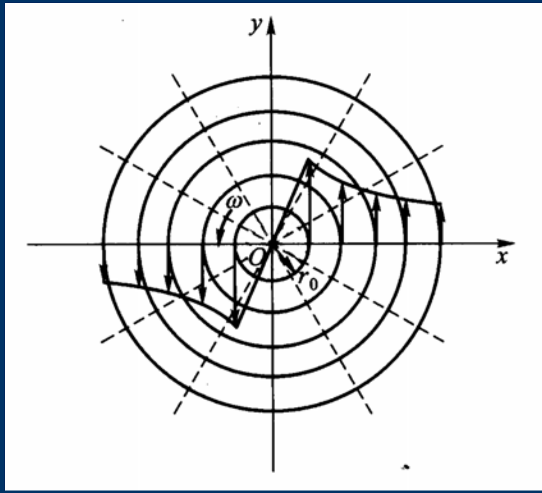
环流的压强分布与源流或汇流的性质是相同的，所不同的是上式中为Γ 而不是**q** 。

（3）直线涡束替换固体圆柱体

将一直线涡束替换固体圆柱体，涡束内的流体如同固体一样绕原中心轴旋转，涡束内的区域称涡核区，涡束外的区域为势流旋转区。

所有流体质点的角转速均相同为ω是有涡流，运动速度的大小则与半径成正比，

$$u=u_\theta=\omega r$$



涡束边缘的速度： $$u_0=\frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

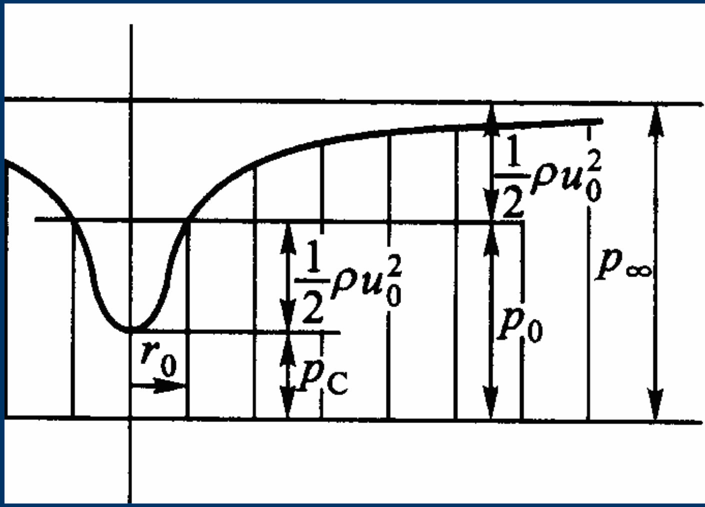
涡束边缘的压强： $$p_0=p_\infty-\frac{\rho u_0^{\,2}}{2}$$

涡束半径： $$r_0=\sqrt{\frac{\Gamma^2\rho}{8\pi^2}\frac{1}{(p-p_\infty)}} \qquad \text{------(4-68)}$$

涡核区内的压强分布可根据欧拉运动微分方程求得

$$p=p_\infty-\rho\omega^2r_0^2+\frac{\rho\omega^2r^2}{2} \qquad \text{------(4-70)}$$

涡核区中心的压强p_c为 $$p_C=p_\infty-\rho u_0^2 \qquad \text{------(4-71)}$$



由于涡核区内的压强比涡核区外势流旋转区的压强低，所以环流有抽吸作用，能把势流旋转区内的部分流体抽吸到涡核区内。

自然界中龙卷风的中心具有真空吸力，能把尘土等物吸人龙卷风的中心；以及一些工业设备装置，如离心式旋风除尘器中的某些气流现象，就是由于抽吸作用的原因。

4-3-6 势流的叠加原理和举例

1、势流叠加原理

几个简单势流叠加组合成的较为复杂的流动仍为势流(复合势流)，它的速度势φ和流函数ψ分别等于被叠加势流的速度势ϕ_1、ϕ_2、…、ϕ_k和ψ_1、ψ_2、…、ψ_k的代数和，且满足拉普拉斯方程 。它的速度**u**等于被叠加势流的速度**u1、u2、…、uk**的矢量和。

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_k \qquad \text{------(4-73)}$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_k \qquad \text{------(4-74)}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k \qquad \text{------(4-75)}$$

2、势流叠加原理举例

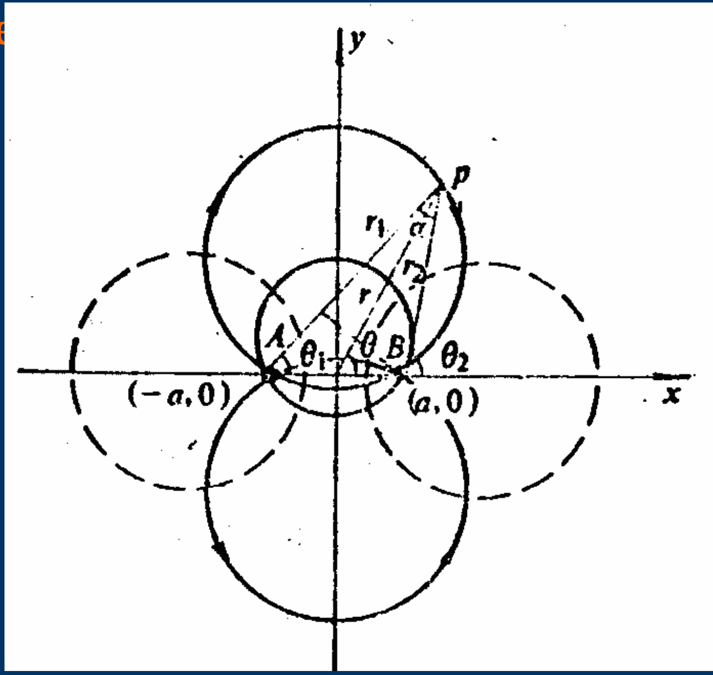
（1）等强度源流和汇流的组合—偶极(doublet//dipole

实例：地下水同时井的抽水、注水。

设有等强度**q**的源和汇分别位于**A**点**(-a，0)**和**B**点**(a，0)**，两个势流组合成的复合势流

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \qquad \text{---(4-76)}$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\ln r_1 - \frac{q}{2\pi}\ln r_2 = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} \qquad \text{---(4-77)}$$

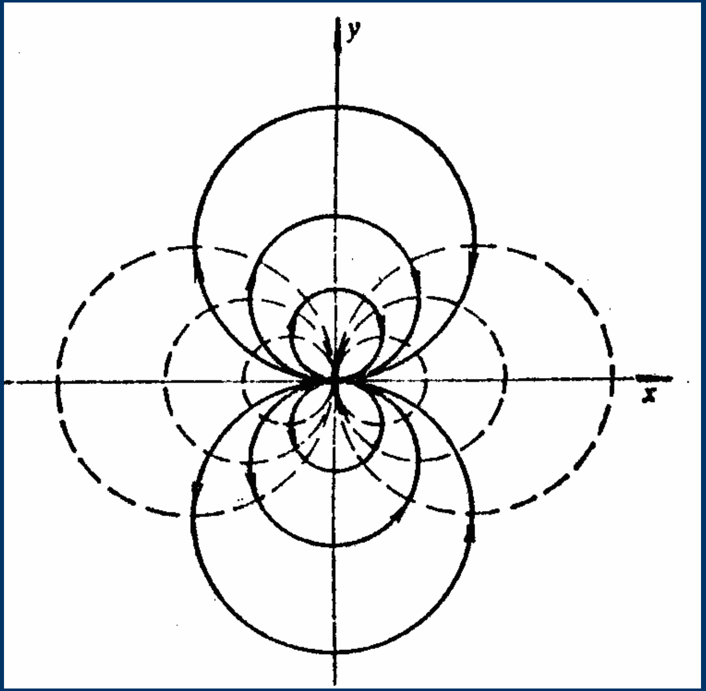


等流函数线(流线) 是圆心在**y**轴上的一族共弦圆，等势线则为与它们正交的另一族圆。

源和汇之间的距离趋于零的极限情况，即a→0时所得的复合势流，称偶极流。

源和汇的强度与距离的乘积2aq=常数＝M的情况。M称偶极强度，它是一矢量，它的方向是由源流到汇流的方向。

$$\psi=-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{r^2}=-\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}\quad ---(4-78)$$



等流函数线，即流线方程为

$$x^2+(y+\frac{M}{4\pi C_1})^2=(\frac{M}{4\pi C_1})^2\quad ---(4-79)$$

$$\phi=\frac{M\cos\theta}{2\pi r}=\frac{M}{2\pi}\frac{r\cos\theta}{r^2}=\frac{M}{2\pi}\frac{x}{r^2}=\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\quad ---(4-80)$$

等势线方程为

$$(x-\frac{M}{4\pi C_2})^2+y^2=(\frac{M}{4\pi C_2})^2\quad ---(4-81)$$

上式表明流线是一族圆心在y轴上的圆族，并在坐标原点与x轴相切。流体由坐标原点流出，沿着圆周，重新又流入原点。因为这里讨论的源在汇的左边，在x轴上半部平面内的流动是顺时针方向，在x轴下半部平面内的流动是逆时针方向。

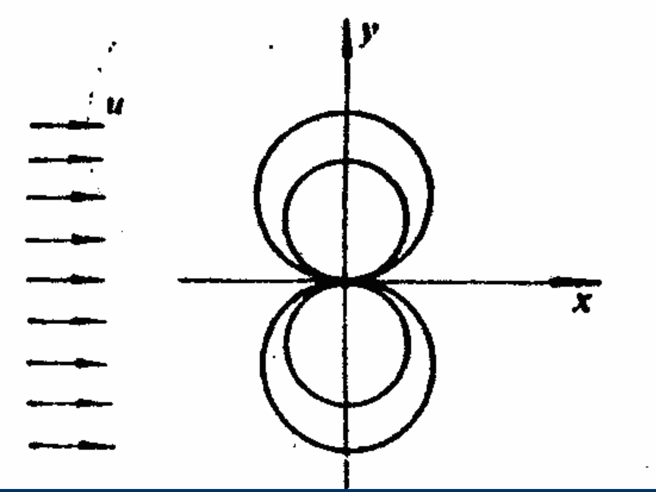
显然，流经任何包围偶极点的封闭曲线的合流量等于零。

等势线是一族圆心在x轴上的圆周族，并在坐标原点与y轴相切。

（2）均匀直线流和偶极流的组合——圆柱绕流

实例：地下水区域流动和井抽水，河水流过桥墩，风吹过烟囱。

设均匀直线流沿x轴方向，速度为 $u_x=u$ ；偶极流的偶极点置于坐标原点，两个势流组合成的复合势流



$$\psi = uy - \frac{M}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} = (ur - \frac{M}{2\pi}\frac{1}{r})\sin\theta \quad ---(4\text{-}86)$$

$$\phi = ux + \frac{M\cos\theta}{2\pi r} = (ur + \frac{M}{2\pi}\frac{1}{r})\cos\theta \quad ---(4\text{-}87)$$

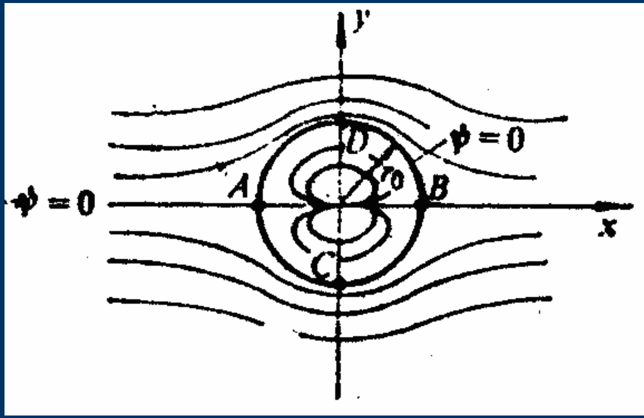
因为驻点速度为零，即 $u_r=0$，$u_\theta=0$，驻点位置

B点： $(\sqrt{\frac{M}{2\pi u}},0)$ ， A点： $(\sqrt{\frac{M}{2\pi u}},\pi)$ 。

通过驻点的流线方程

$\theta=0,\theta=\pi$ 即x轴为流线；

$r_0^2=\frac{M}{2\pi u}$ 半径为r_0的圆也是流线。

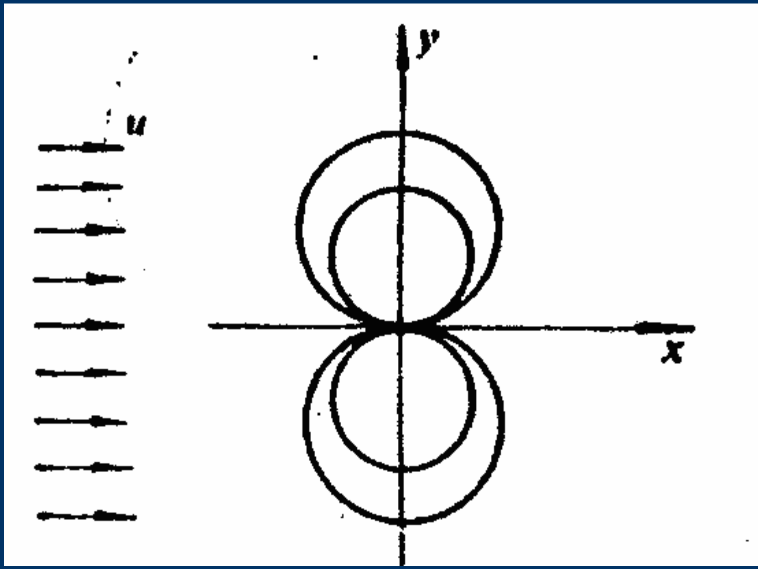


流线上的A点和B点是驻点，流线在A点分开后又在B点合在一起。

偶极流附近的所有流线都位于圆内。如果用固体边界来替换这个圆，并不影响界线外的流动。所以均匀直线流和偶极流叠加组合得到的复合势流，相当于均匀直线流绕过一圆柱体壁面的势流，

$$\psi = ur\sin\theta(1-\frac{r_0^2}{r^2}) \qquad ---(4-91)$$

$$\phi = ur\cos\theta(1+\frac{r_0^2}{r^2}) \qquad ---(4-92)$$

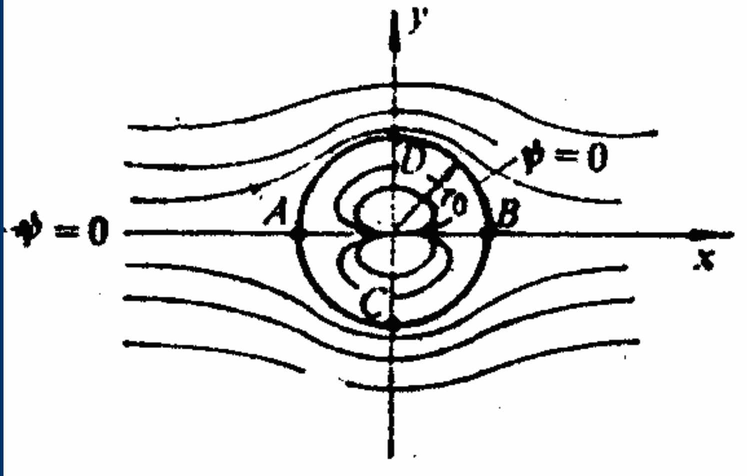


圆柱表面上的速度分布：

$$u_r = 0 \qquad u_\theta = -2u\sin\theta \qquad ---(4-95)$$

上式说明圆柱表面上的速度分布沿圆周的切线方向，负号表示流动是沿与θ轴相反的方向。

驻点**A**点和**B**点的速度最小；当**r=r$_0$**和θ=±π时，速度的绝对值达到最大，即**|u$_{\theta\ max}$|=2u**。



绕柱运动的压强

绕柱运动的压强分布可应用伯努利方程求得，当流动是在水平面内进行时，

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}(u^2 - u_\theta^2) \qquad ---(4-96)$$

式中：p_∞为均匀直线流中的压强。

工程上常用压强系数C_p来表示圆柱表面任一点的压强，定义为

$$C_p = (p - p_\infty) / \frac{\rho u^2}{2} \qquad ---(4-98)$$

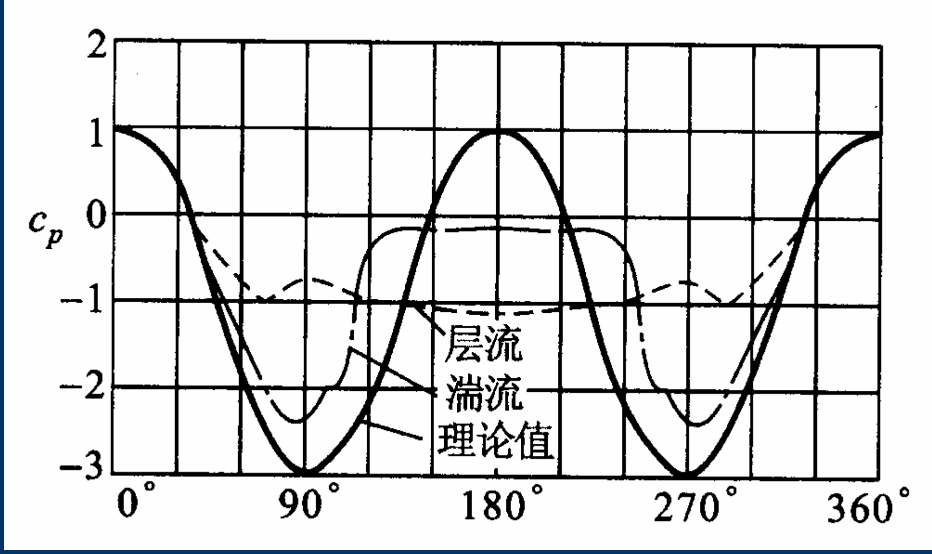
将式（**4-95**）代入上式得： $C_p = 1 - 4\sin\theta$ ---(4-99)

表明：C_p既与圆柱的半径无关，也与均匀直线流的速度和压强无关。

理论的压强系数C_p 值沿圆柱表面的变化规律

在驻点*A*、B处， θ =0及 θ = π ，压强最大，在点***C***、***D***处， θ =±2/ π ，压强最小。

压强分布对称于***x***轴也对称于***y***轴，所以作用于圆柱表面上的压强在***x***轴及***y***轴方向的合力都等于零。表示圆柱体在静止流体中等速前进时没有阻力(著名的达朗伯佯谬)。



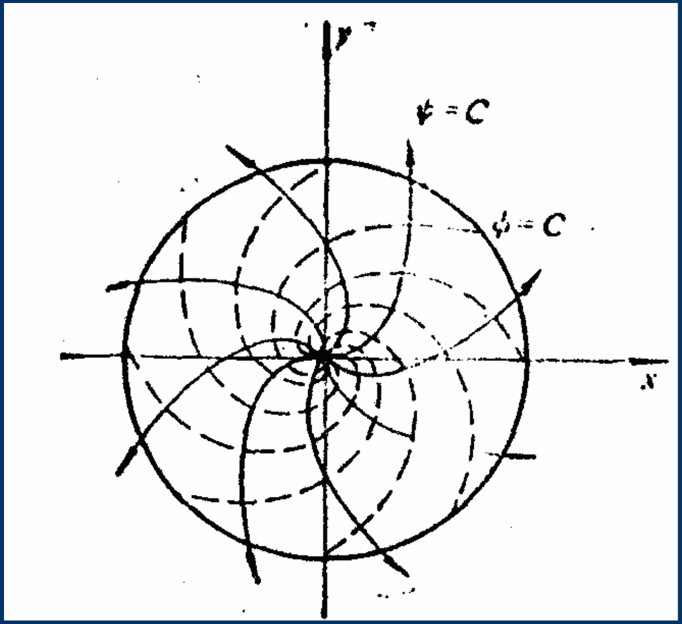
（3）源流或汇流和环流的组合源环流或汇环流

实例：容器底部小孔旋转出流，旋风除尘器、旋风燃烧室、离心式水泵叶轮内流体。

设有一源流和环流，它们的中心均位于坐标原点(0，0)，环流按逆时针方向运动。上述两个势流组合成的复合势流称源环流。

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \qquad \text{---(4-100)}$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\ln r + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad \text{---(4-101)}$$



等流函数线，即流线方程为

$$r = C_1 e^{\frac{q}{\Gamma}\theta} \qquad \text{---(4-102)}$$

等势线方程为

$$r = C_2 e^{-\frac{\Gamma}{q}\theta} \qquad \text{---(4-103)}$$

上式表明等势线、流线都是一族对数螺旋线，等势线与流线。

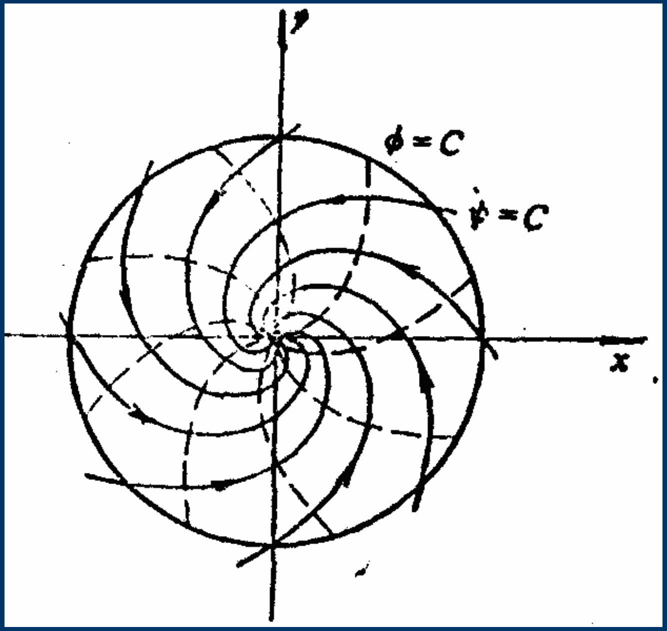
离心式水泵叶轮内流体的流动是符合此规律。当叶轮不转，供水管供水时，叶轮内的流体运动可视为源流；当叶轮转动，供水管不供水时，叶轮内的流体运动可视为环流；当叶轮转动，供水管供水时，叶轮内的流体运动可视为源流和环流的叠加组合。

为了避免流体在叶轮内流动时与叶轮发生碰撞，离心式水泵的叶轮，理论上应做成螺旋线状。

若将源环流中的源流换成汇流，组合成称汇环流

$$\psi=-\frac{q}{2\pi}\theta-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \quad ---(4-104)$$

$$\phi=-\frac{q}{2\pi}\ln r+\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad ---(4-105)$$



等流函数线，即流线方程为

$$r=C_1e^{-\frac{q}{\Gamma}\theta} \quad ---(4-106)$$

等势线方程为

$$r=C_2e^{\frac{\Gamma}{q}\theta} \quad ---(4-107)$$

上式表明等势线、流线都是一族对数螺旋线，等势线与流线。

在实际生活中，当水流由容器底部小孔旋转流出时，容器内的流动可近似地视为汇环流。在实际工程中，旋风除尘器、旋风燃烧室等设备中的旋转气流，在理想情况下可视为一种汇环流。

思考题

1、欧拉运动微分方程组在势流条件下的积分形式的应用与沿流线的积分有何不同？

1、什么是流函数、势函数？它们存在的条件各是什么？它们是否都满足拉普拉斯方程形式？为什么？

2、流函数有哪些物理意义？

3、什么是流网？流网有些什么性质？有哪些应用？

4、为什么圆柱绕流、土坝渗流可用势流的叠加原理来求解？

本章小结

一、基本概念

1、基本概念及其性质

流函数的性质：流函数等值线ψ(x，y)=C就是流线 ； d ψ =dq

流网的性质：流网网格为正交网格。存在条件：不可压缩平面势流。

2、理想流体的伯努利方程物理意义：

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=C'$$ ——单位质量 $$rz+p+\rho\frac{u^2}{2}=Const$$ ——单位体积

* $$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=C$$ ——单位重量流体的伯努利方程：

	物理意义	几何意义
z –	单位重流体的位能（比位能）	位置水头
$\frac{p}{\gamma}$ –	单位重流体的压能（比压能）	压强水头
$\frac{u^2}{2g}$ –	单位重流体的动能（比动能）	流速水头
$z+\frac{p}{\gamma}$ –	单位重流体总势能（比势能）	测压管水头
$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}$ –	总比能	总水头

本章小结

二、基本方程及其应用：

•流函数：$$d\psi = -u_y dx + u_x dy = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_x, \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_y, d\psi = dq$$

存在条件：平面流动，不可压缩流体。

•势函数：$$d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_x, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_y, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u_z$$

存在条件：无旋流，即有势流动。

•理想流体的伯努利方程：（能量方程）

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = C$$

适用条件：理想流体，质量力只有重力，恒定，不可压缩，无旋或沿流线（一元、二元、三元流均可）。

本章小结

•流函数和势函数的关系

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$\nabla^2\varphi=0,\nabla^2\psi=0$ ——适用条件：势流及φ、ψ的其他存在条件。

$\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots,\phi=\phi_1+\phi_2+\cdots$ 势流叠加后仍为势流。

三、解题方法

1、求φ或ψ

•互求：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{cases}$$

•已知u_x，u_y，u_z，求φ或ψ。

a.由 $d\varphi=u_xdx+u_ydy,d\psi=-u_ydx+u_xdy$ 直接积分

b.由

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(=\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

$$u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

分别积分积分