第四章 扭 转（Torsion)

赠言

子曰：“学而不思则罔，思而不学则殆。”

《论语·学而第一》

注：罔 —— 蒙蔽，欺骗

殆 —— 疑惑

一、回顾

已经学习了 ——

- 拉、压
- 剪切
- 挤压（受力物体接触问题，外部关系；因注意内部，不研究它了）

目前剪切还是近似计算，值得深入研究

二、如何深化对剪切的认识?

沿面内作用的力 —— 剪切力

作用结果 —— 把截面剪断： 可作为深化认识的出发点

给你一个火腿肠，如何在中间截为两段？

（1）刀切开

（2）剪子剪

（3）电锯（轮或平）截 —— 以上用工具，空手呢？

（4）掰（弯）

（5）拉

（6）扭

分析一下：

（1）、（3）是产生损伤及使其扩展，材力不讲

（4）属于弯曲，以后讲

（5）拉断的位置不确定，也不讲

（2）断开面两侧平行错动，实际上沿面内有剪力作用

（6）断开面两侧扭转错动，实际上沿面内有剪力作用

——扭矩转化过来

(2)（剪子剪）(6)（扭）的共同点 —— 剪力作用

(2)（剪子剪）(6)（扭）的不同点 ——

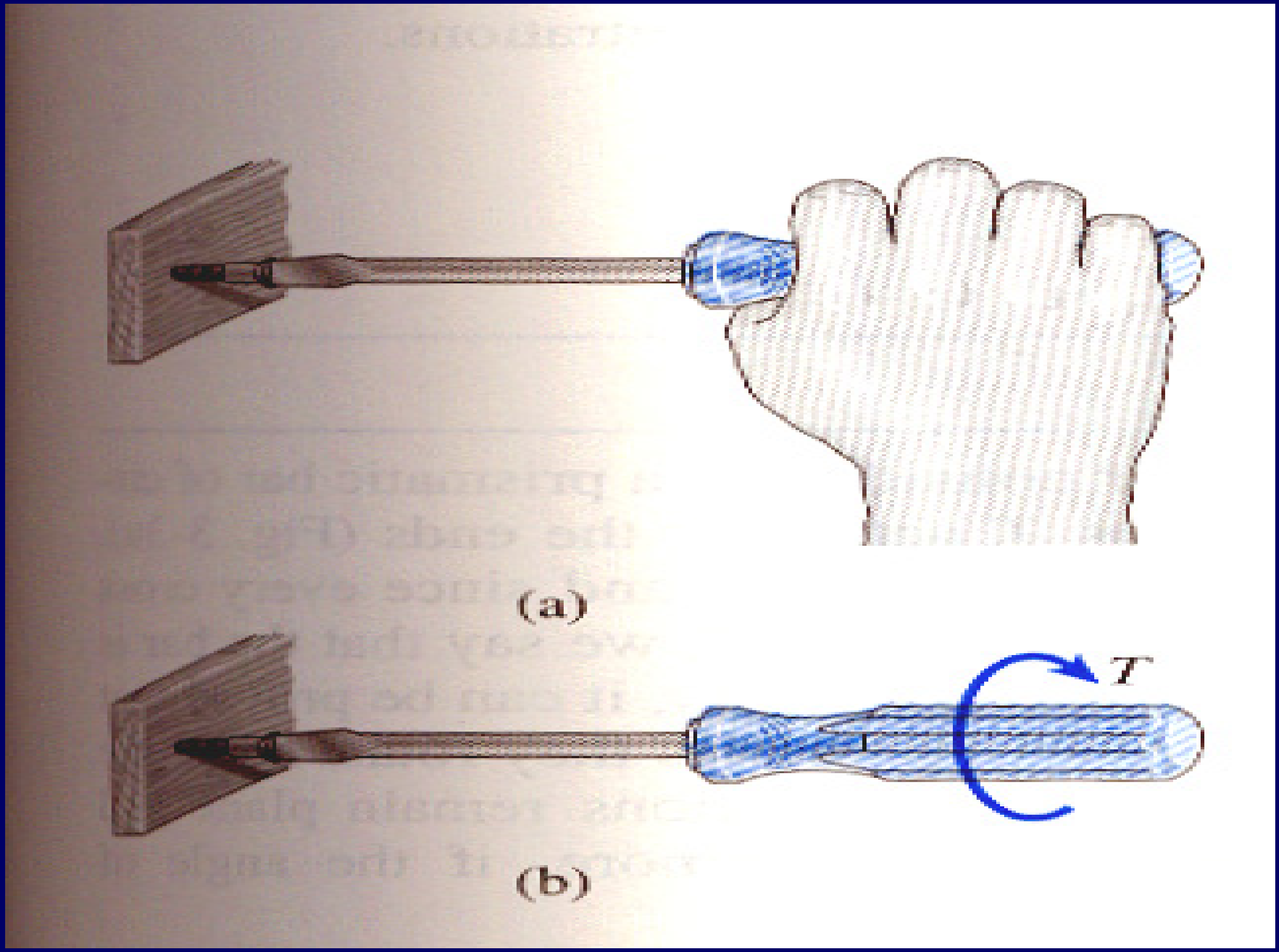
(2)的剪切面相邻两侧平行错动

(6)的剪切面相邻两侧转动错动

可见扭转现象同剪切相关，本章专门研究它

三、常见的扭转现象

- 扭水龙头
- 用钥匙扭转开门
- 酒瓶软木塞的开瓶器
- 小轿车的方向盘工作
- 自行车的脚蹬工作
- 机器轴的转动
- 改锥上螺丝钉



扭转的例子

本章主要内容

- ◆ **4.1** 外力偶矩、扭矩和扭矩图
- ◆ **4.2** 纯剪切、切应力互等定理、剪切胡克定律
- ◆ **4.3** 圆轴扭转横截面应力和强度条件
- ◆ **4.4** 圆轴扭转时的变形和刚度条件
- ◆ **4.5** 圆轴扭转斜截面上的应力

4.1 外力偶矩、扭矩和扭矩图

- 外力偶矩 **(Torsion couple)**

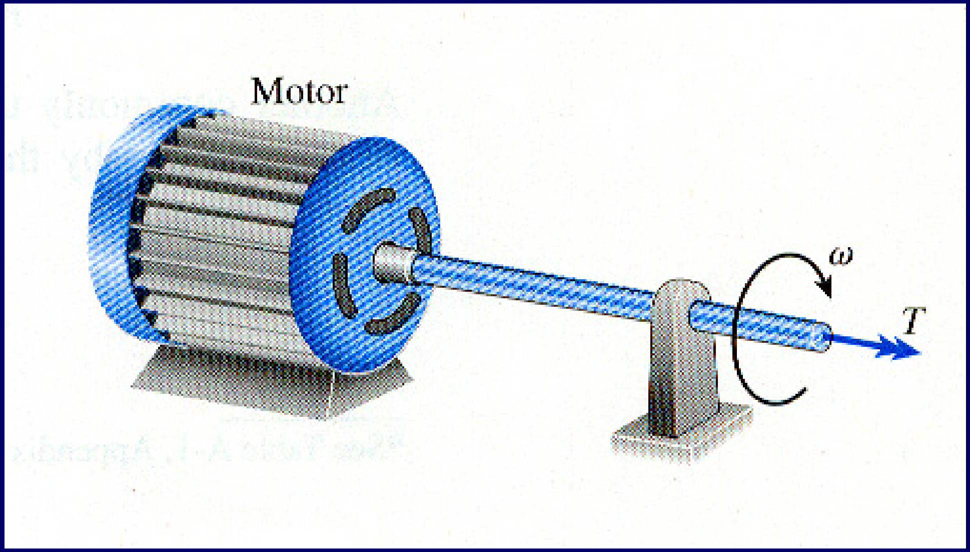
  力偶（ **Force couple)**作用下产生的力矩

  (Force moment)

- 扭矩 **(Torsion torque)**

  使杆绕轴线发生扭转变形的外力偶矩

- 扭矩图**(Torsion torque graph)**



电机传递扭矩　转动机器

匀速转速—n转/分钟

输出功率—N千瓦

求扭矩T（图中 T是机器对于电机扭矩的反作用力矩）

解:　《出发点 —— 计算一分钟的功 W》

从电机看　$W = N$ (千瓦） × 60（秒） =

N (1000 牛顿米 / 秒）× 60（秒）

从扭矩看　$W = T$ (牛顿米） × ϕ（弧度） =

T (牛顿米） × $2\pi n$（弧度）

两式得扭矩　$$T = \frac{60000N}{2\pi n} = 9549\frac{N}{n}\text{(牛顿米)}$$

•当N为千瓦　　扭矩　$T = 9549\dfrac{N_{kW}}{n}$（N m)

•当N为马力　　扭矩　$T = 7024\dfrac{N_{H.P.}}{n}$（N m)

注意：第2个公式不需要记，因为

1 *H. P.*(马力, horsepower) = **0.7355** ***kW***(千瓦特, k-watt)

所以　$N_{H.P.}(H.P.) = 0.7355 N_{H.P.}(kW)$

代入第1式，得　$T = 9549\dfrac{0.7355 N_{H.P.}}{n} = 7024\dfrac{N_{H.P.}}{n}$

例4.1[P90]　（1）算出外力偶矩

（2）外力偶矩要平衡

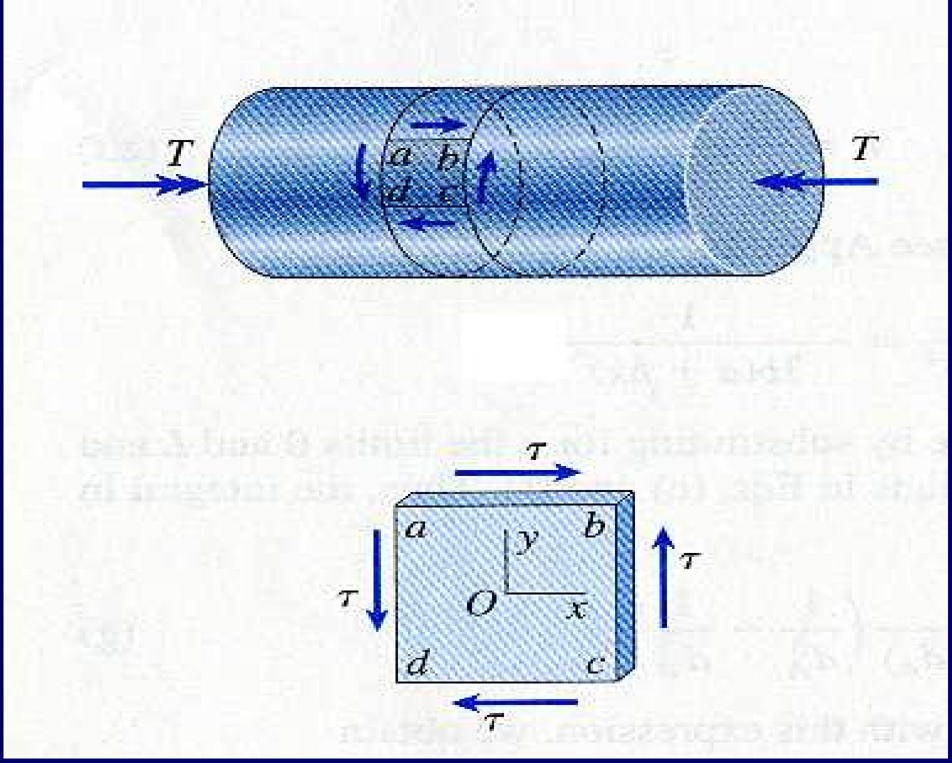
（3）双箭头矢量做，同轴力图类似

4.2 纯剪切 Pure shear

切应力互等定理 Reciprocal theorem of shear stresses

郑玄—胡克剪切定律 Zhengxuan — Hooke's law in shear

- 纯剪切: 只有切应力的应力状态



切应力互等定理

- **切应力互等定理**

单元体上两个互垂面上剪应力的大小相等、方向相反（共同指向交线或背离交线）

证明：以 d 轴取矩，得**上面剪力**和**右面剪力**平衡方程

$$(\tau_{ab}ab \times t) \times bc = (\tau_{bc}bc \times t) \times ab$$

故得 $\tau_{ab} = \tau_{bc}$

类似可证明 —— 每两个邻近边切应力值相等

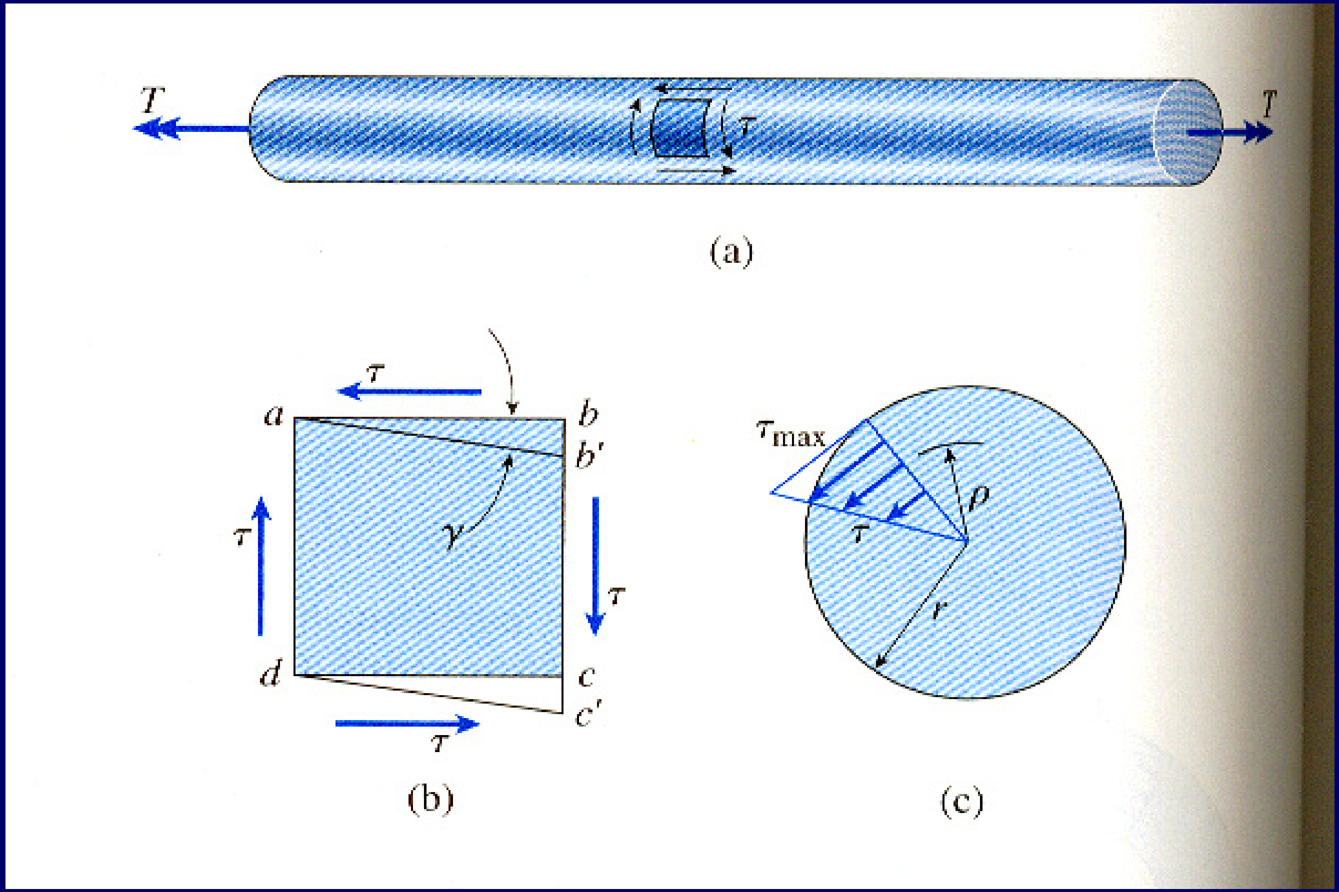
注意：不仅纯剪切，而且任何平衡力作用，

都成立**切应力互等定理**(**Reciprocal theorem of shear stresses** 或 **Theorem of conjugate shearing stress**)

图（c）中最大切应力对应于图（b）哪一个切应力？

答：图（c）最大切应力对应于图（b）右边切应力。

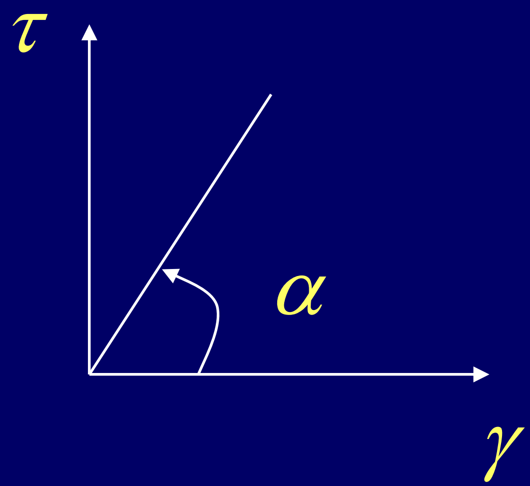
注意：图（c）切应力按线性分布，原因再讲

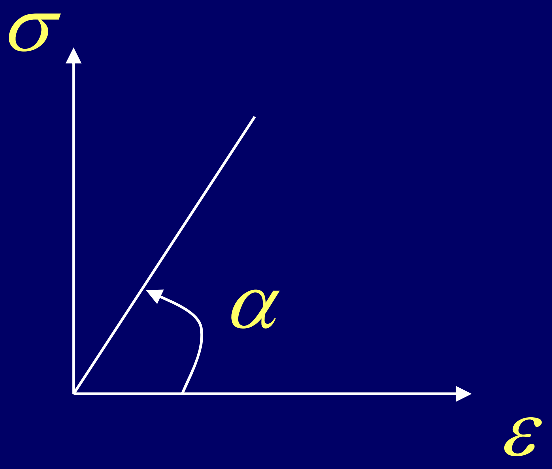


切应变的定义 $\gamma = \delta(dy) / dx = bb' / ba$

郑玄—虎克剪切定律

$$\tau = G\gamma \qquad \sigma = E\varepsilon$$





$$G = tg\,\alpha \qquad E = tg\,\alpha$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

说明3个性能只有2个独立

此式在第9章给出证明

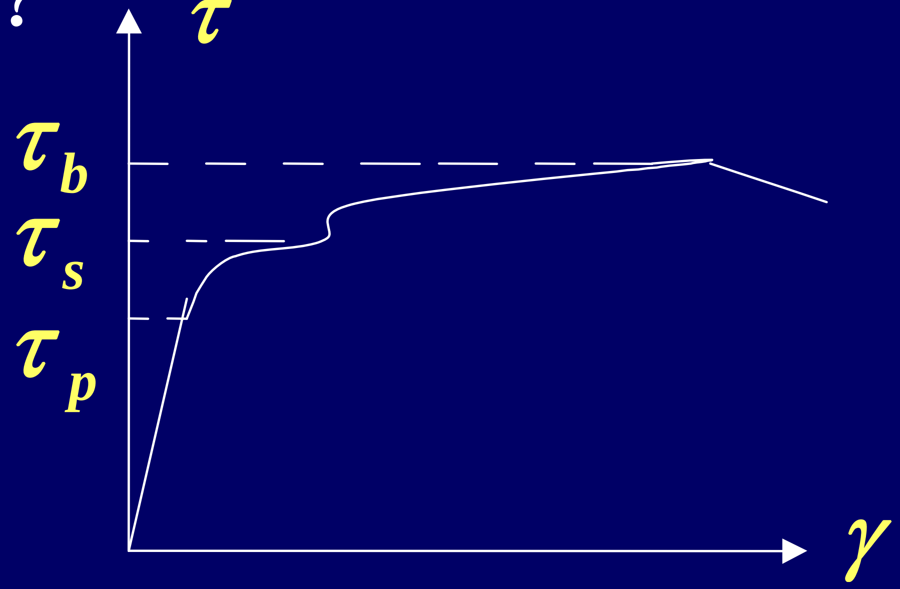
郑玄—虎克剪切定律只是弹性阶段的规律

本构关系全程本构关系如何？

要做纯剪切实验

（如薄壁圆管扭转）

得到 $\tau-\gamma$ 图



其中

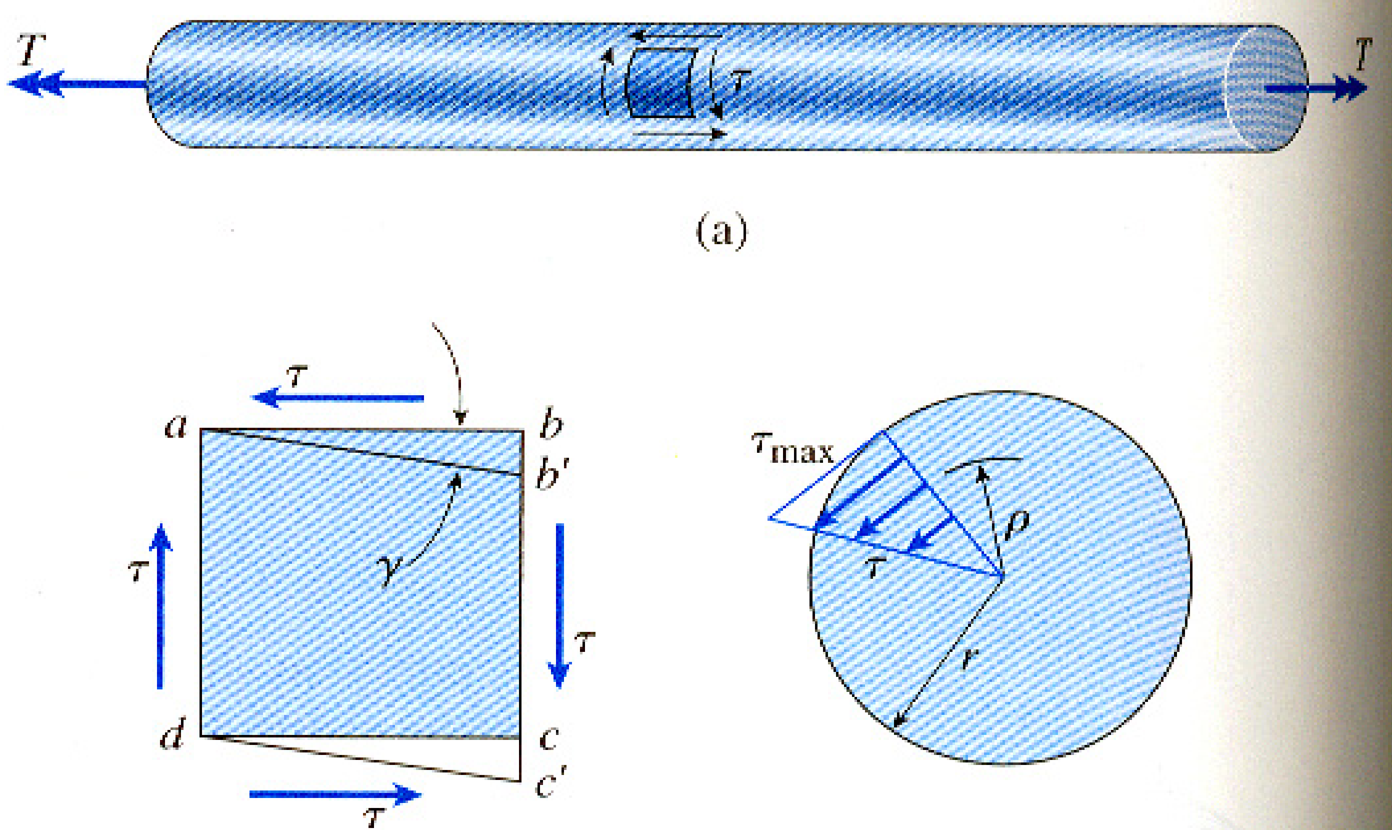
τ_p —— 剪切比例极限应力（线弹性阶段）

τ_s —— 剪切屈服极限应力（进入塑性阶段）

τ_b —— 剪切强度极限应力（破坏阶段）

4.3 圆轴扭转横截面应力和强度条件

受扭圆轴截面上切应力分布



(a)

(b)

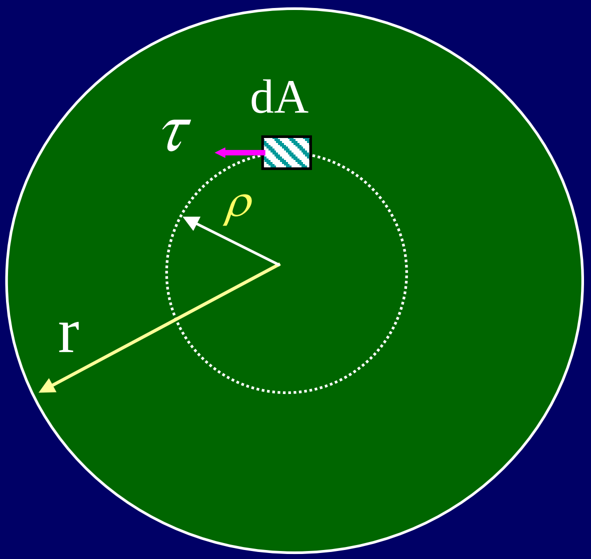
(c)

•静力平衡

微元 ***dA*** 对轴心产生的力矩

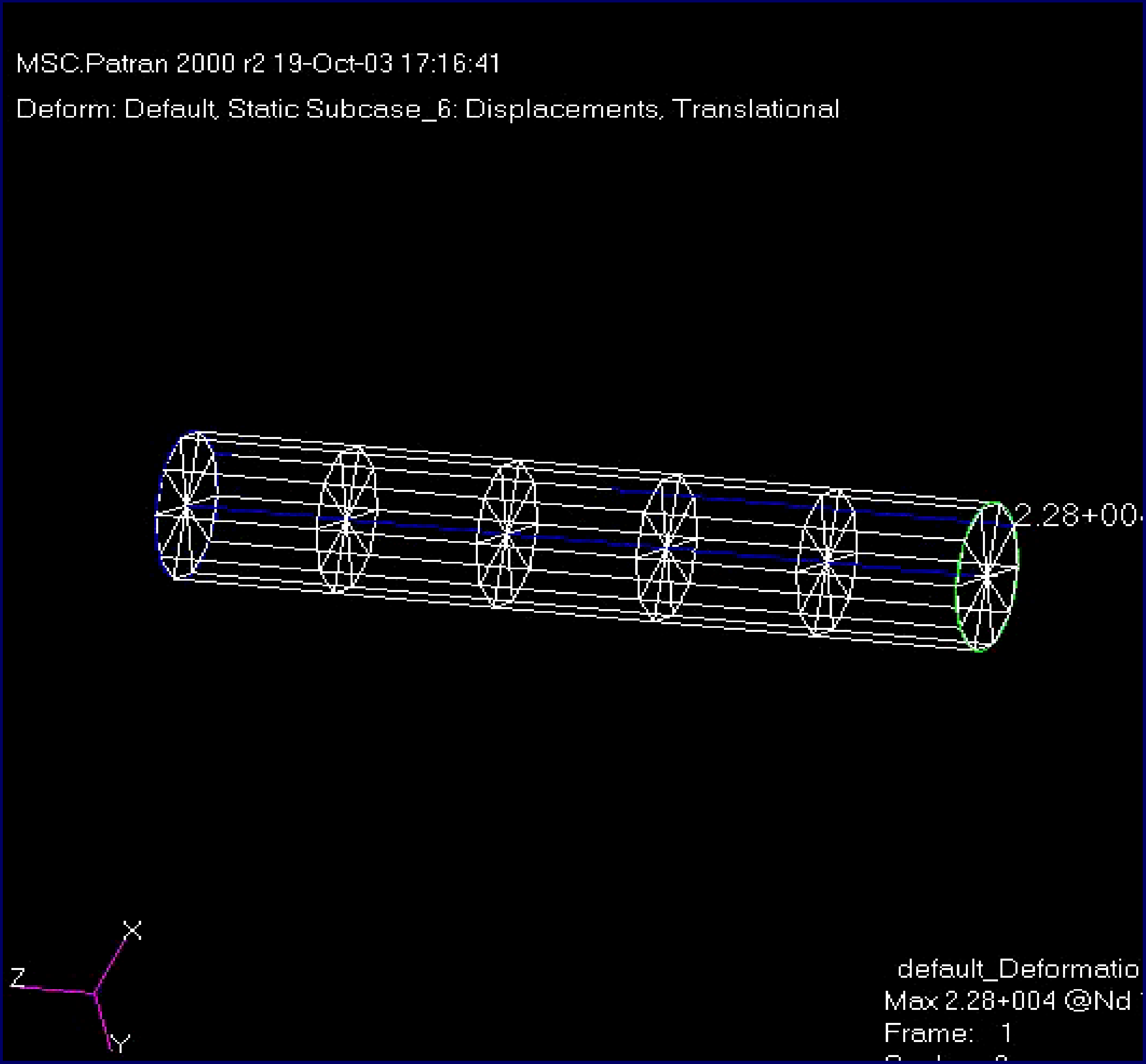
$$dM = \rho\tau\, dA$$

$$T = \int_A dM = \int_A \rho\tau\, dA$$



因切应力是个未知函数——无穷个未知数

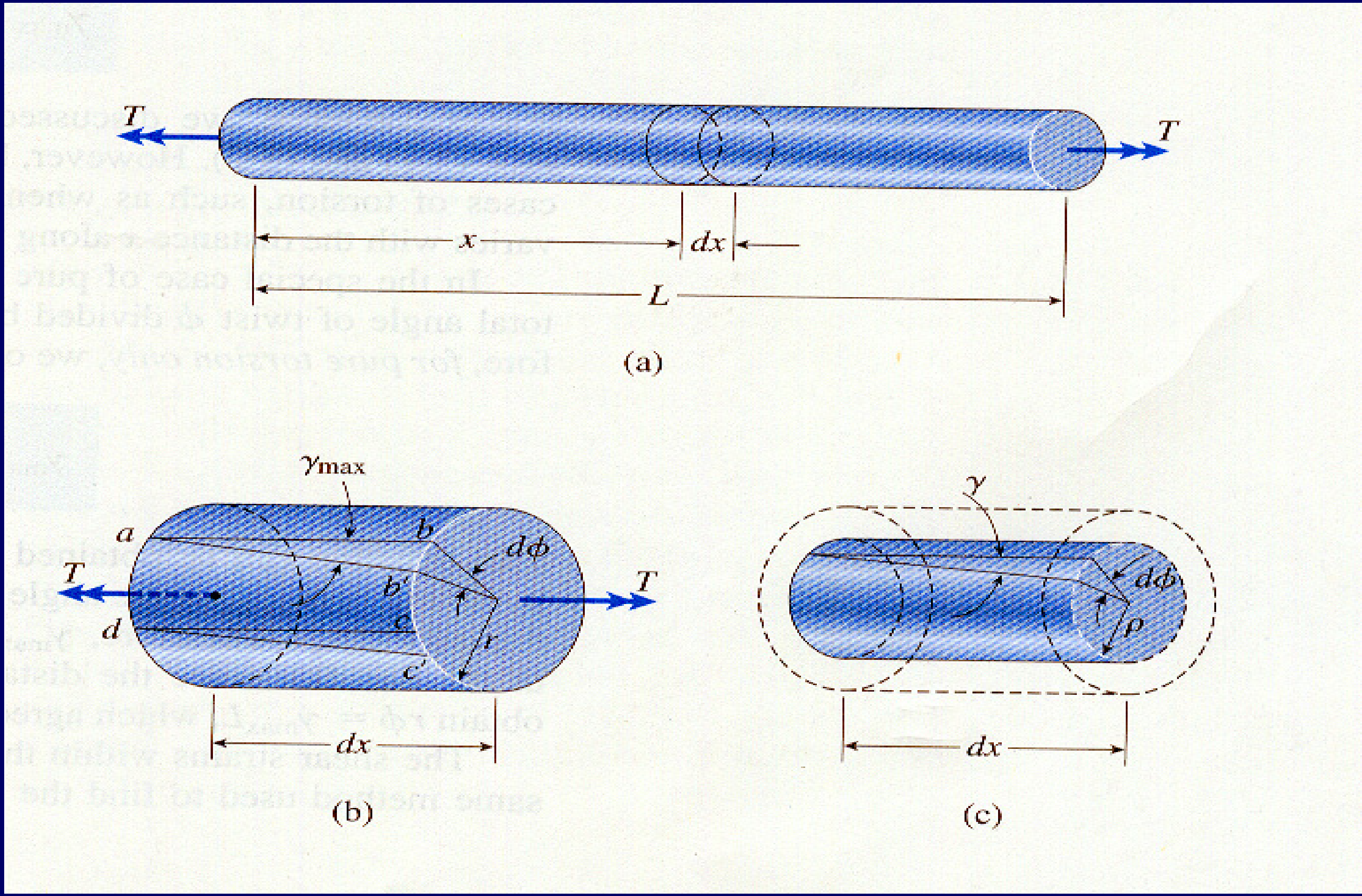
而方程只有一个，故为 **超静定问题**


MSC.Patran 2000 r2 19-Oct-03 17:16:41
Deform: Default, Static Subcase_6: Displacements, Translational
2.28+00
X
Z
Y
default_Deformatio
Max 2.28+004 @Nd
Frame: 1

•变形协调

平衡不足变形补 ——

先实验，后（推广）得假定



图(b)是实验结果:

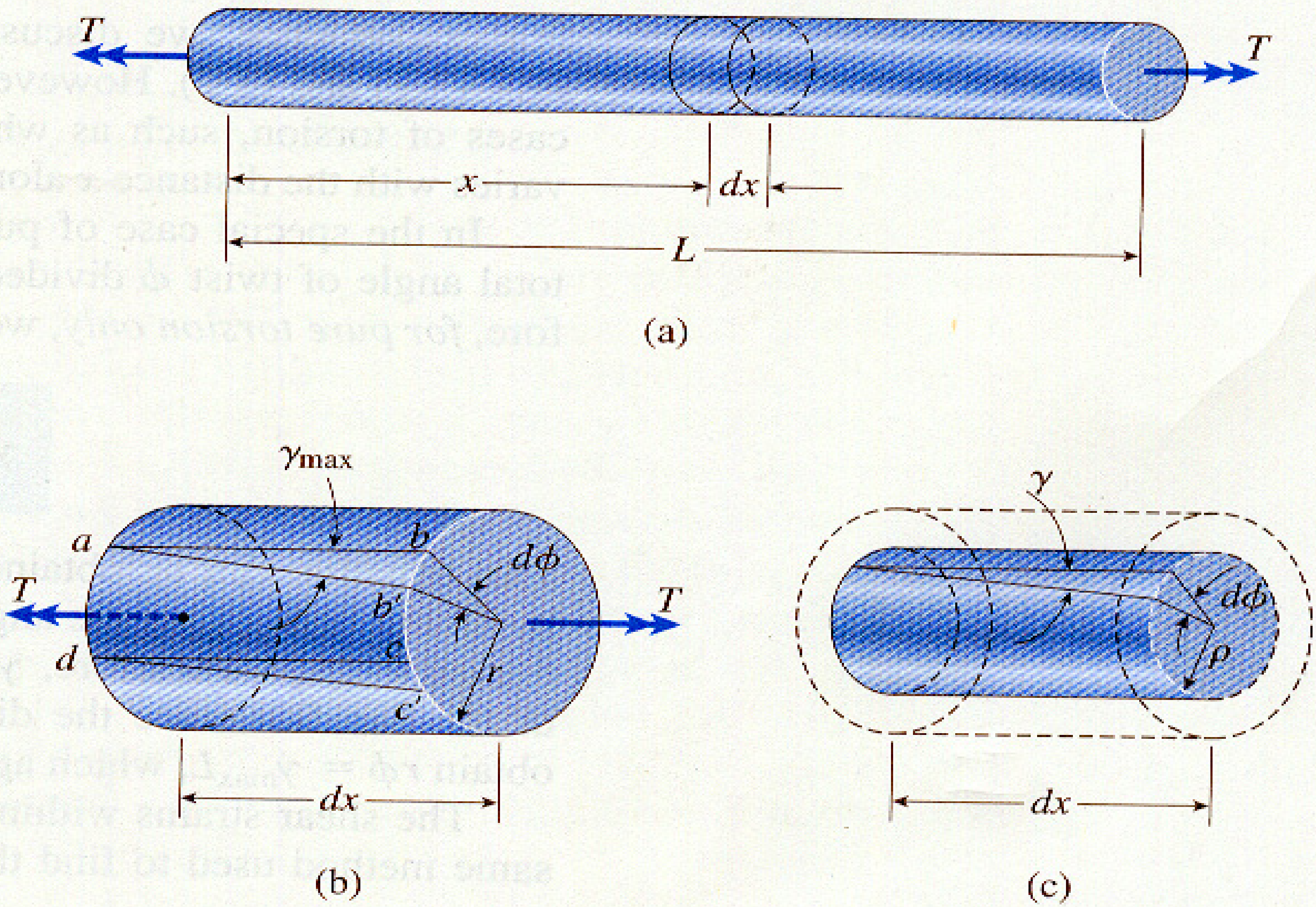
1、圆周线保持形状、大小、间距不变，仅绕轴转动

2、母线仍是直线，仅绕轴转动

图(c)是由表及里的想象 —— 假定:

1、横截面保持为平面，形状、大小、间距不变

2、半径保持为直线



T
T
x
dx
L
(a)
γmax
a
b
b′
c
c′
d
dφ
r
T
T
dx
(b)
γ
dφ
ρ
dx
(c)

$$\gamma\, dx = \rho\, d\phi$$

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

切应变沿半径线性变化，虽然函数解出了，但是系数尚不知

•本构关系

上面求出了

$$T = \int_A \rho\tau \, dA \qquad \gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

因变量不统一，还是解不出

如何把切应变 $\longrightarrow$ 切应力？

根据本构关系（郑玄—胡克定律）

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\phi}{dx}$$

代入平衡公式

$$T = G \frac{d\phi}{dx} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\phi}{dx} I_p$$

其中

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \qquad \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

代入应变公式 $\gamma = \rho \dfrac{d\phi}{dx}$ 得

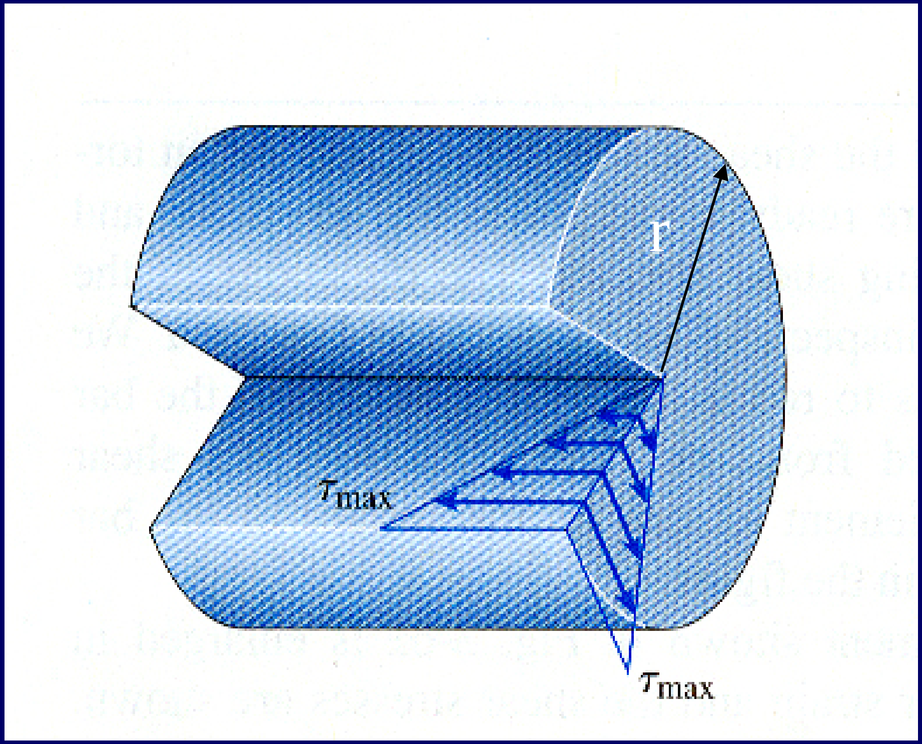
$$\gamma = \rho \frac{T}{GI_p} \longrightarrow \tau = \rho \frac{T}{I_p}$$

还是通过**静力**、**变形**、**本构**三方面解决了问题

对环型截面 $dA = 2\pi\rho d\rho$ 于是

$$I_p = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$$

圆轴扭转的强度条件



轴半径

$$r = D/2$$

$$\tau = \rho \frac{T}{I_p}$$

最大切应力在截面边缘 $\tau_{max} = r\frac{T_{max}}{I_p} = \frac{T_{max}}{I_p / r} = \frac{T_{max}}{W_t}$

其中 $W_t = \frac{I_p}{r}$

$$\tau_{\max} \le [\tau] \qquad \tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t}$$

注意

1、对阶段轴，要选大的 $\tau_{\max}$ 不是看 $T_{\max}$

2、对塑性材料 $[\tau] = (0.5 - 0.6)[\sigma_t]$

3、轴类零件考虑到动荷因素，许用切应力值比静荷下的值小

例4.2 [P99]　最好会推出抗扭模量的公式

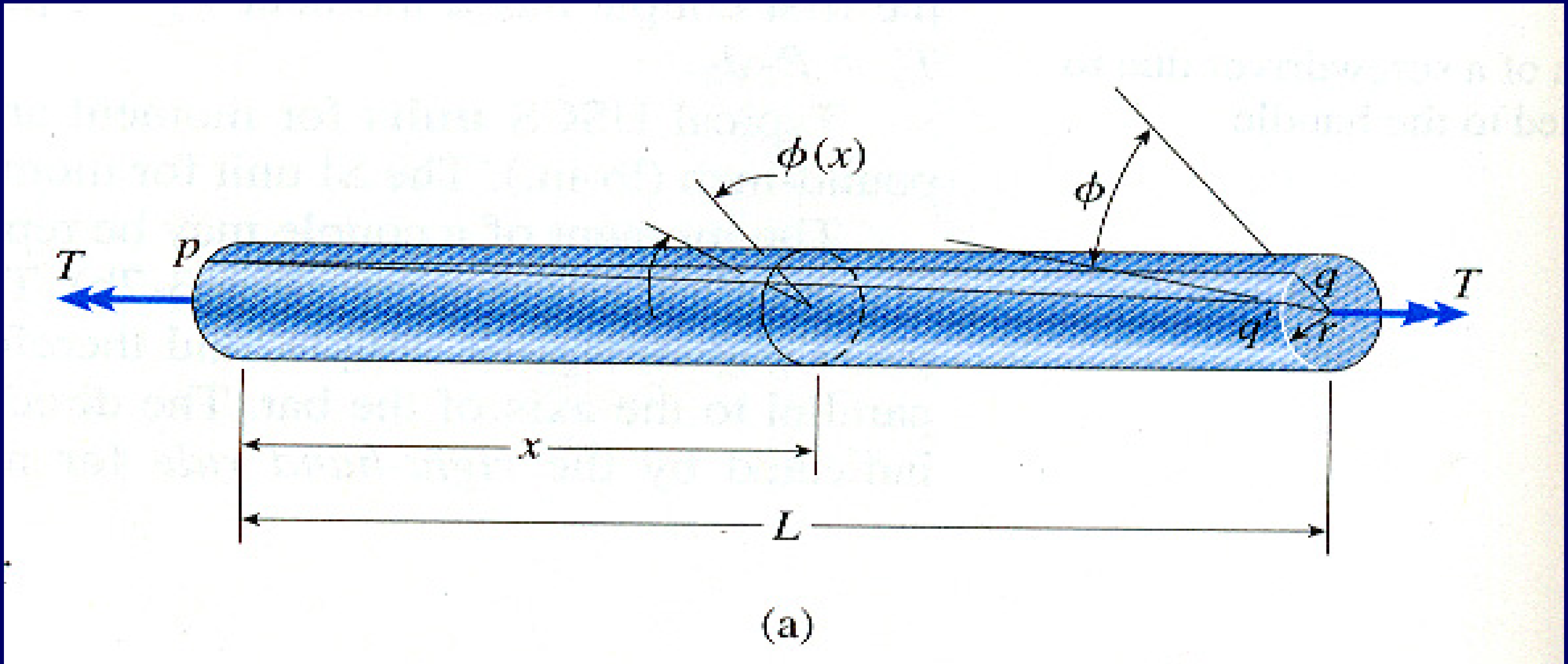
例4.3 [P99]　（1）有没有更好的解法?

不用切应力相等，用抗扭模量相等去求解,可否？

（2）注意重量的增加，为什么？

习题：[P122] 4.1, 4.2, 4.4

4.4 圆轴扭转时的变形和刚度条件



1、强度问题解决了，必然要解决刚度（变形）问题

2、拉压变形——伸缩，扭转变形？——转角

3、如何解决？仿拉压，从应变着手

•拉压 $\sigma \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow \Delta l$

•扭转

$$\tau = \frac{T\rho}{I_p} \longrightarrow \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T\rho}{GI_p} \longrightarrow$$

同式 $\gamma = \rho \dfrac{d\phi}{dx}$ 比较得 $\dfrac{d\phi}{dx} = \dfrac{T}{GI_p}$

最后得 扭转角 $\phi = \int_0^l \dfrac{T}{GI_p} dx$ （rad)

*若为等扭矩、等截面 $\phi = \dfrac{Tl}{GI_p}$

*若为阶梯扭矩、阶梯截面 $\phi = \sum_{i=1}^{l} \dfrac{T_i l_i}{GI_{p_i}}$

•圆轴扭转的刚度条件

化为单位长度上的扭转角（rad/m)

$$\varphi = \frac{\phi}{l} = \frac{T}{GI_p}$$

为保证刚度，要求 ——

单位扭转角的最大值小于许用值

$$\varphi_{\max} \leq [\varphi]$$

许用值根据重要性确定

见[P102]

例题提示

- 例4.4 [P102] 分别按强度、刚度设计直径，然后呢？
- 例4.5 [P103] 1、变截面：直径函数 —— 极惯性矩函数

  2、扭矩函数

  3、变截面、变扭矩，怎么求转角？

  在微分长度上 —— 视它们为常数

  然后 —— 积分

  4、怎么积分 ？ —— 变量变换
- 例4.6 [P104] 1、共同工作，变形相同

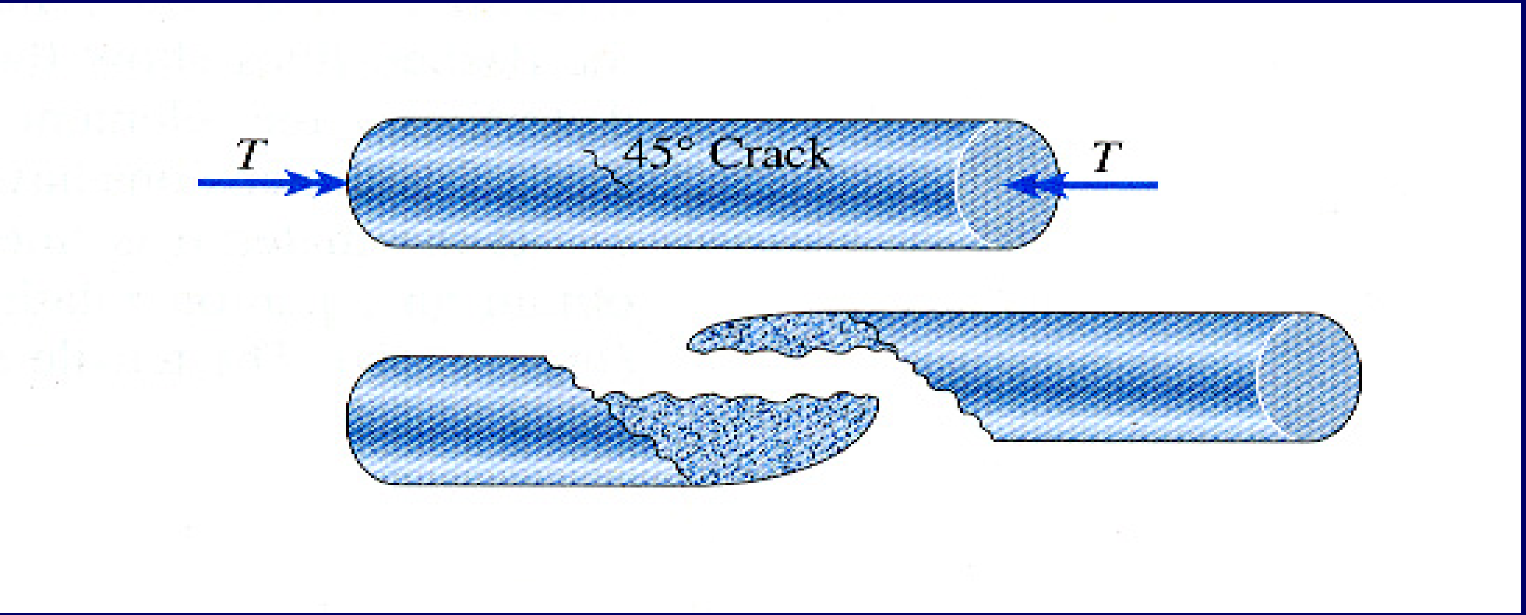
  2、三方面 —— 平衡、协调、本构

4.5　圆轴扭转斜面上的应力

为什么研究斜截面应力？

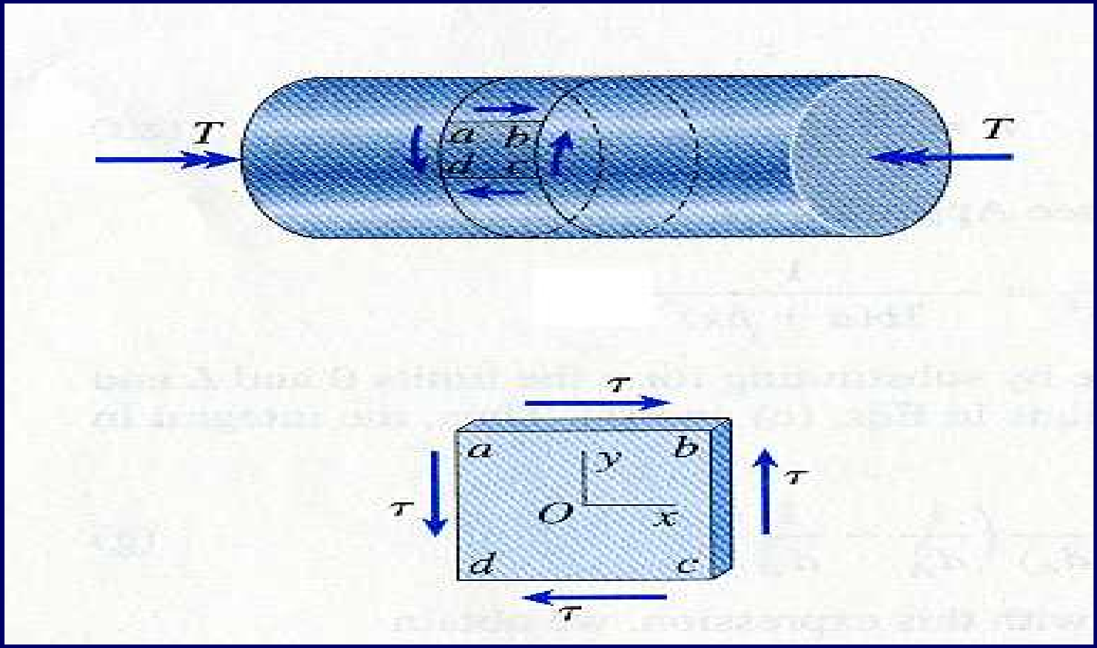
☆　逻辑上，正截面——斜截面

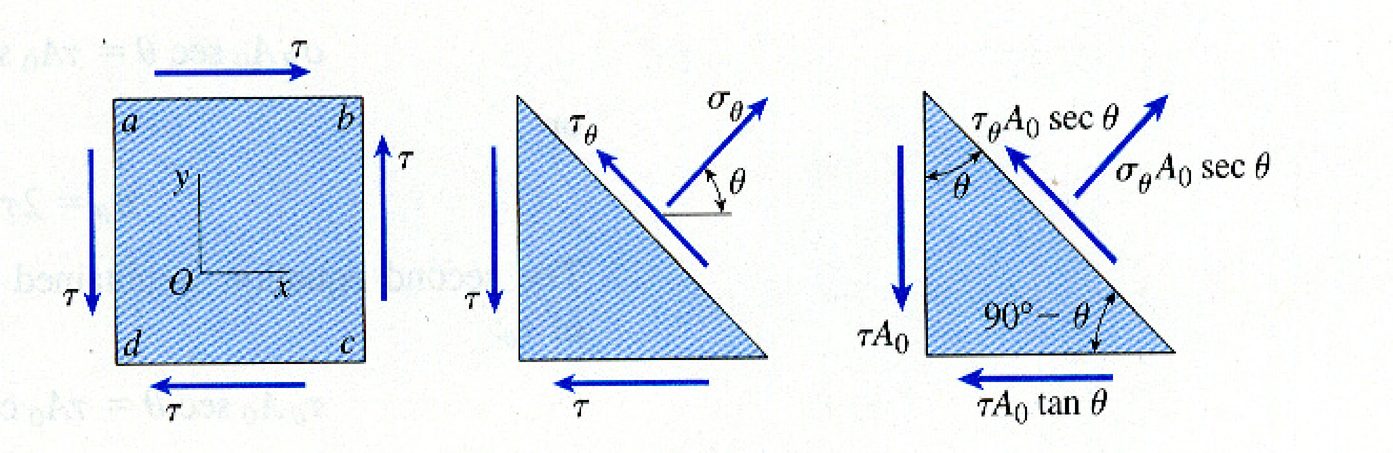
☆　实际上，见下面的实验结果，原因？



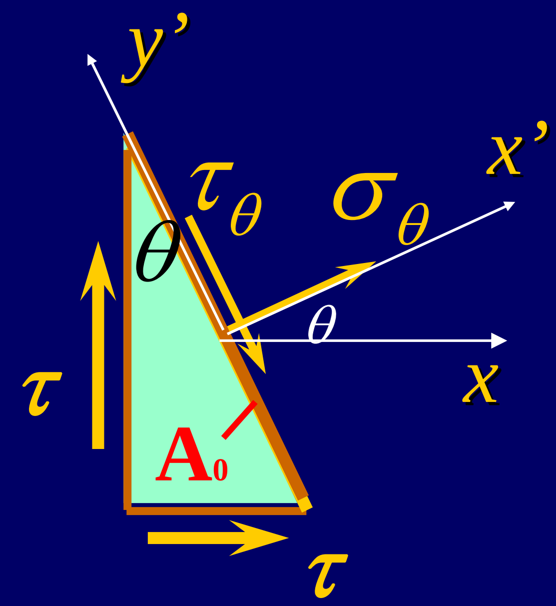
扭转轴的破坏（想一想：为什么这样？）

途径：1、仿正截面过程；2、用正截面推导斜截面应力





(a) (b) (c)



切应力方向规定 —— 使单元体顺时针转动的切应力为正

方位角方向规定 ——以 x 轴为起点逆时针转到斜面外法线的角为正

为计算斜面上应力 τ_θ， σ_θ

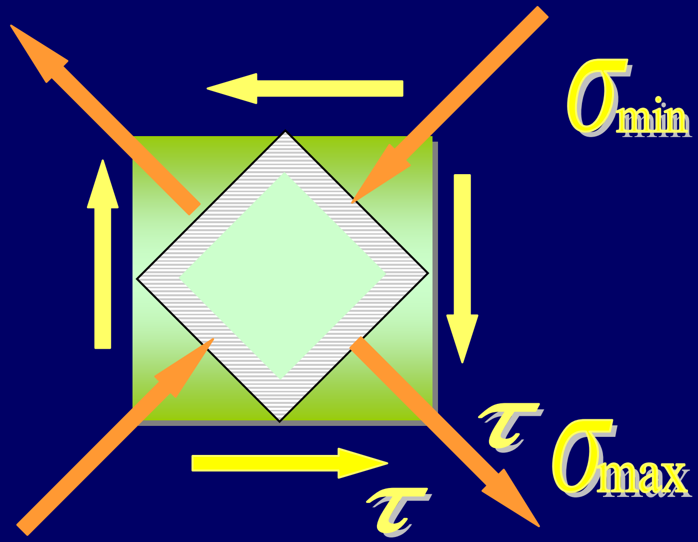
列出 σ_θ 和 τ_θ 两个方向的平衡方程：

$$\sigma_\theta A_0 + (\tau A_0 \sin\theta)\cos\theta + (\tau A_0 \cos\theta)\sin\theta = 0 \longrightarrow$$

$$\sigma_\theta = -2\tau\sin\theta\cos\theta = -\tau\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta A_0 + (\tau A_0 \sin\theta)\sin\theta - (\tau A_0 \cos\theta)\cos\theta = 0 \longrightarrow$$

$$\tau_\theta = \tau(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tau\cos 2\theta$$



$$\sigma_\theta = -\tau \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau \cos 2\theta$$

上述公式可得到如下结论。

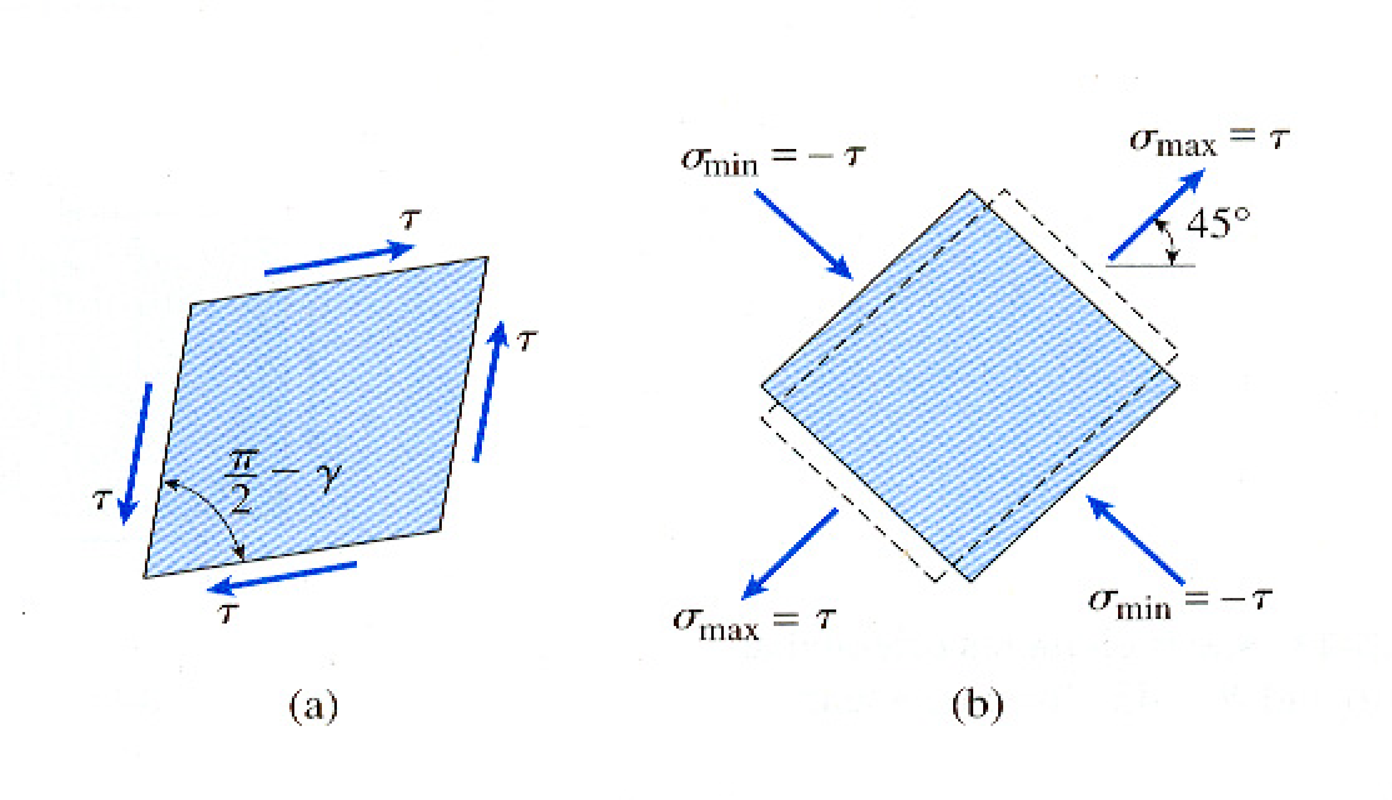
$\theta = 0^0$　　$\sigma_{0^\circ} = 0$ ，$\tau_{0^\circ} = \tau_{\max} = \tau$

$\theta = 45^0$　　$\sigma_{45^\circ} = \sigma_{\min} = -\tau$ ，$\tau_{45^\circ} = 0$

$\theta = -45^0$　　$\sigma_{-45^\circ} = \sigma_{\max} = \tau$ ，$\tau_{-45^\circ} = 0$

$\theta = 90^0$　　$\sigma_{90^\circ} = 0$ ，$\tau_{90^\circ} = -\tau_{\max} = -\tau$

在- 45°的斜截面上, 有最大拉应力 ——可解释破坏现象



拉应力是脆性材料破坏的主要原因