有限元法
电子教案

杨庆生
制作

之 三

本课件包括五部分:

一、绪论

第一章 绪论

二、弹性力学基础

第二章 基本概念与假设

第三章 平面问题的基本理论

三、有限元理论及程序

第四章 有限元法的基本概念

第五章 等参元

第六章 三角形单元计算机程序

四、有限元的扩展

五、应用

三、有限元法的理论及程序

(16课时)

第四章　有限元法的基本概念
第五章　等参元
第六章　三角形单元计算机程序

第四章 有限元法的基本概念

4.1 弹性力学问题的离散化

4.2 有限元的分析过程

4.3 单元分析

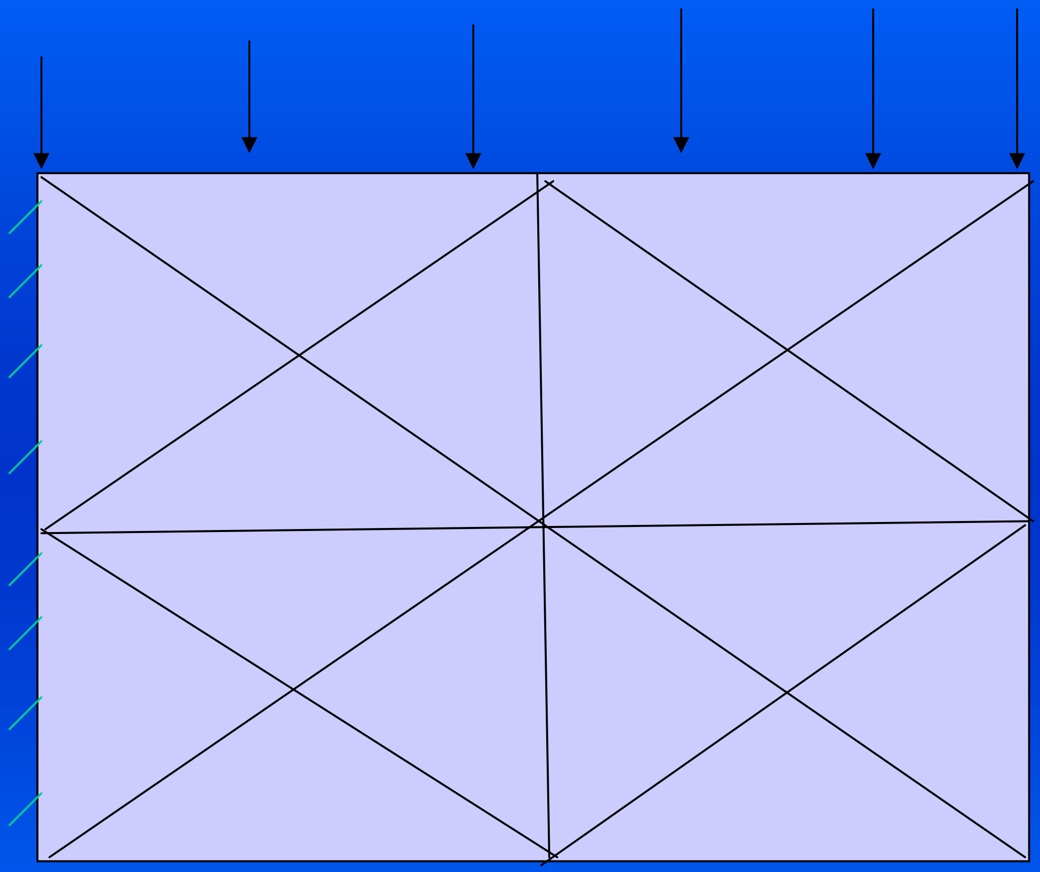
4.4 解答的收敛性准则

4.5 单元刚度阵的另一推导

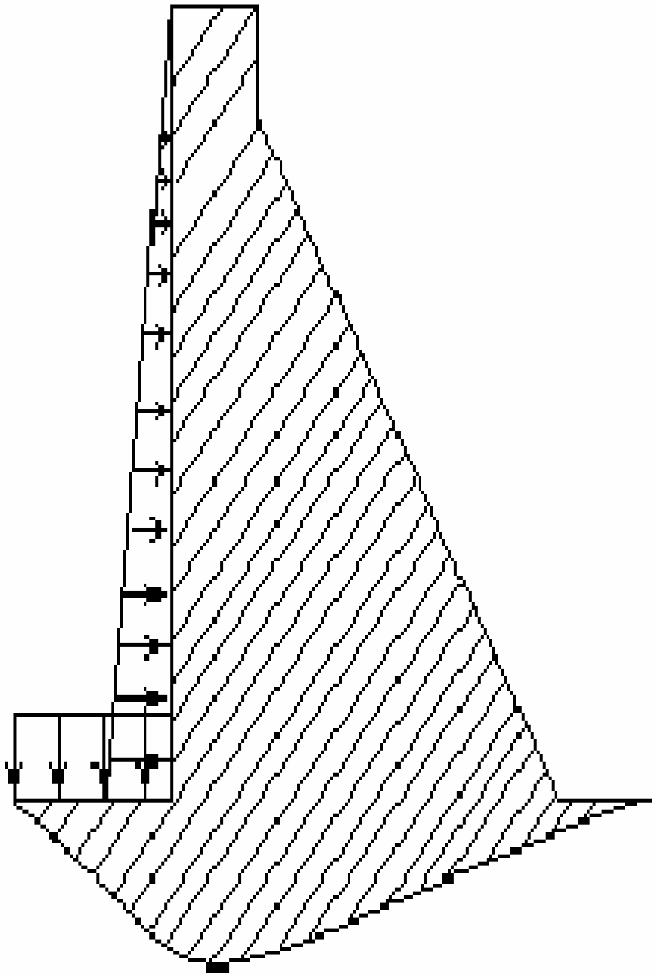
4.6 整体分析

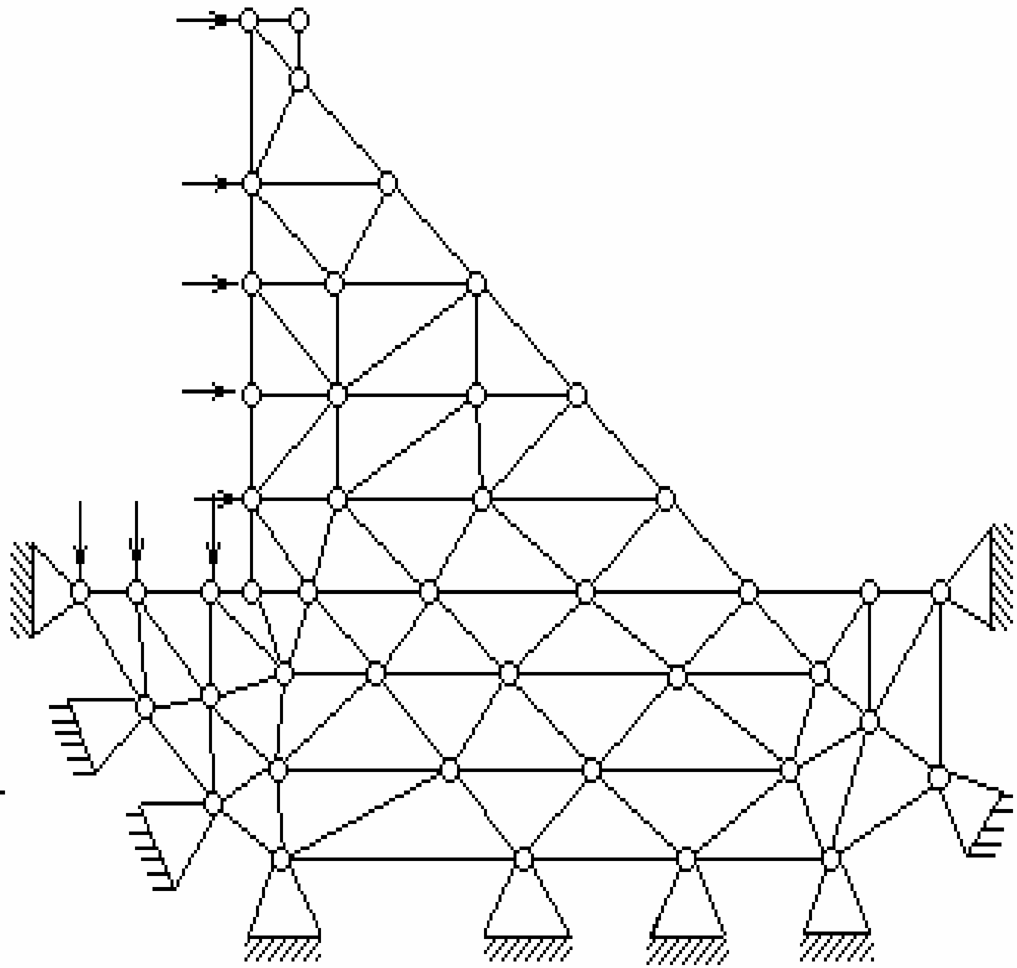
4.7 边界条件的引入

4.1弹性力学问题的离散化



单元, 结点





4.2 有限元的分析过程

离散化 → 单元分析 → 整体分析

单元分析 ↓

单元内位移,应变,应力用结点位移表示

↓

单元刚度阵

整体分析 ↓

单元拼加

↓

边界条件

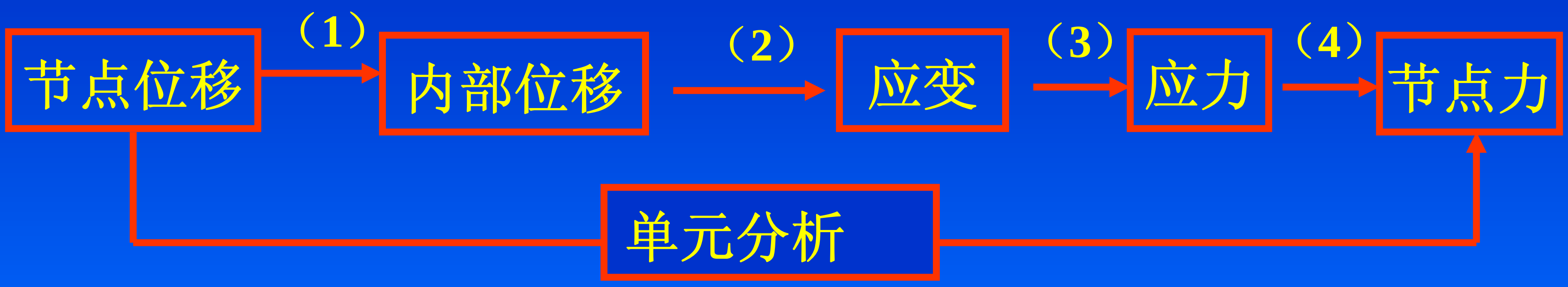
↓

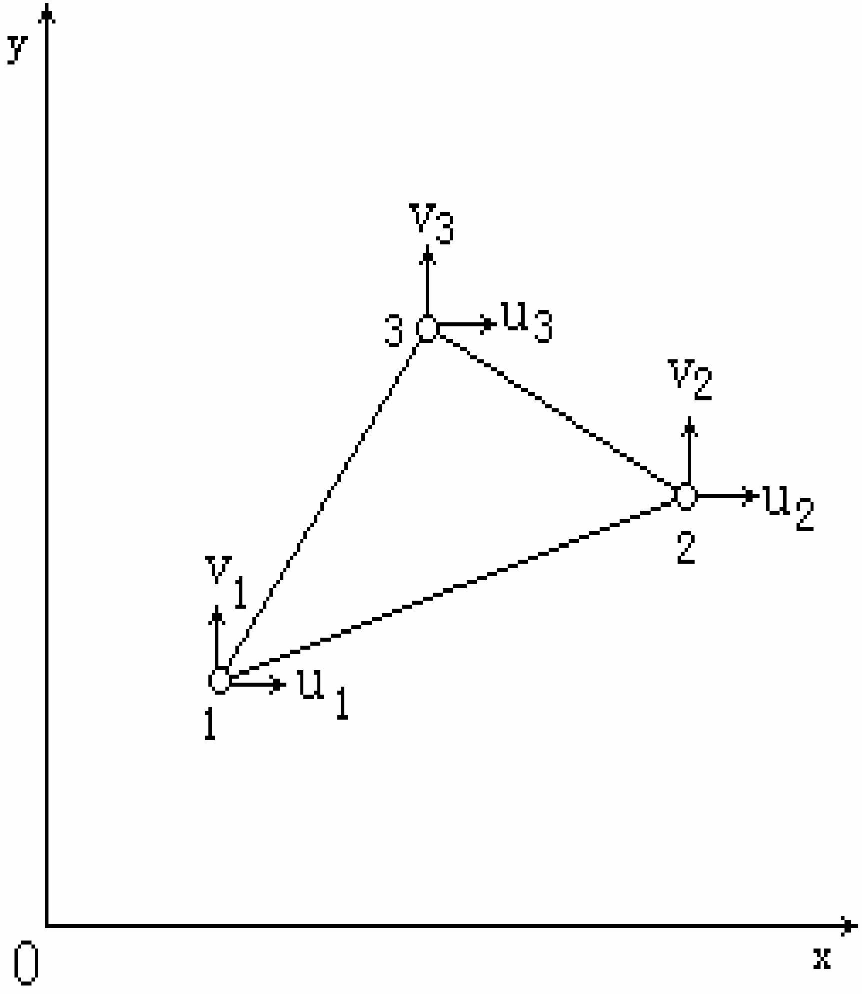
求解

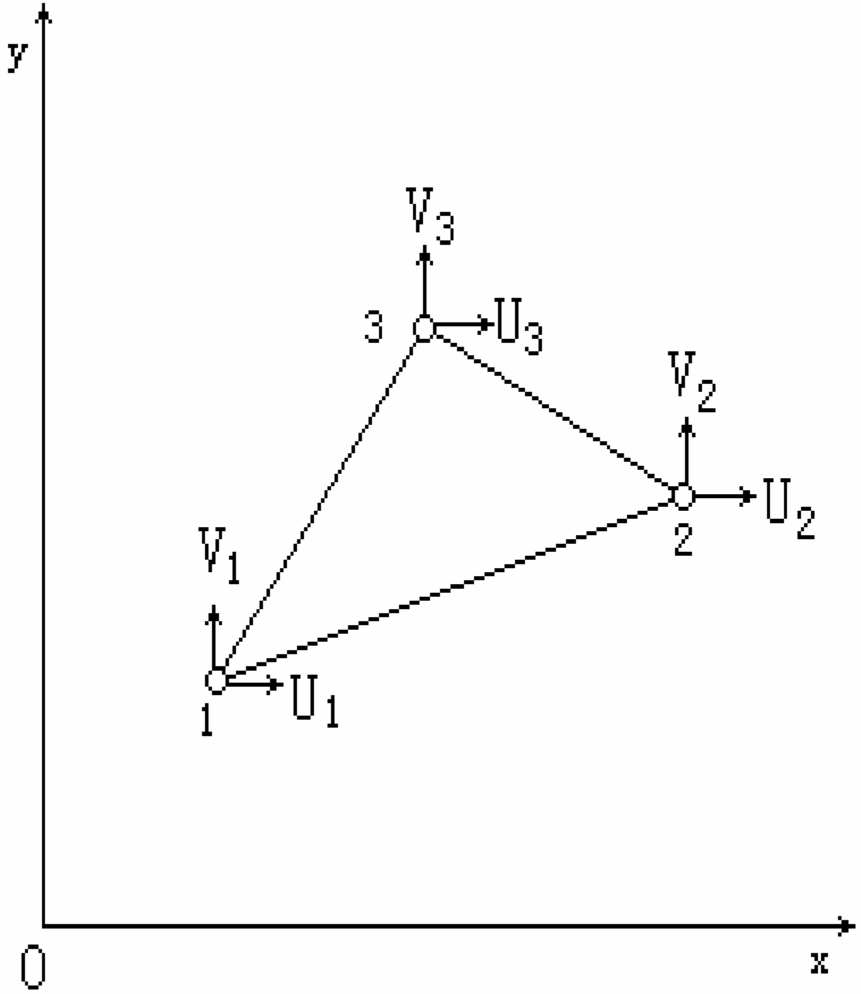
4.3 单元分析

常应变三角形单元

单元分析的步骤如下：

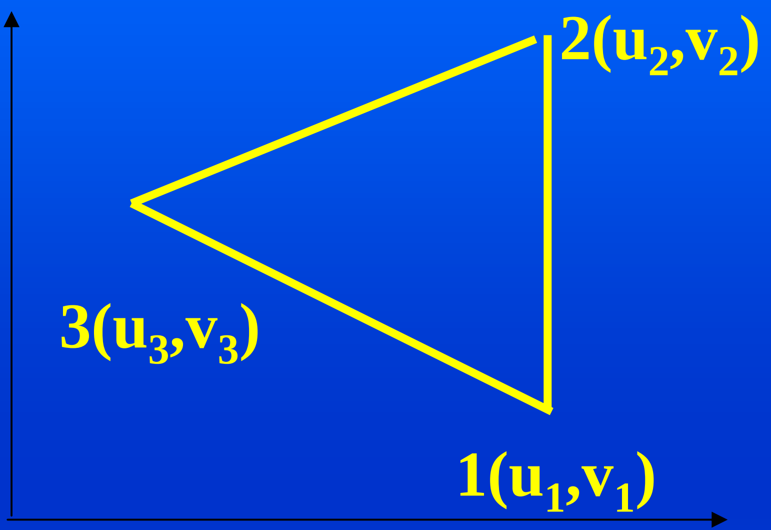



y
v3
3
u3
v2
u2
2
v1
1
u 1
1
0
x


y
V3
3
U3
V2
U2
2
V1
1
U1
1
0
x

1.结点位移(结点变量)

$$\{a_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$



$$\{a\} = \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \{a_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

结点力

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

单元位移模式

单元内任何一点的位移用结点位移表示

$$\begin{cases} u(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ v(x,y) = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \end{cases}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 y_1 \\ u_2 = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 y_2 \\ u_3 = \beta_1 + \beta_2 x_3 + \beta_3 y_3 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
v_1 = \beta_4 + \beta_5 x_1 + \beta_6 y_1 \\
v_2 = \beta_4 + \beta_5 x_2 + \beta_6 y_2 \\
v_3 = \beta_4 + \beta_5 x_3 + \beta_6 y_3
\end{cases}
$$

$$
\begin{Bmatrix}
\beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \\ \\ \beta_6
\end{Bmatrix}
= \frac{1}{2\Delta}
\begin{bmatrix}
a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\
b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\
c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\
0 & a_1 & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & c_3
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
u_1 \\ v_1 \\ \\ \\ \\ v_3
\end{Bmatrix}
$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_1 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \\ \\ \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N(x,y)]\{a\}$$

$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

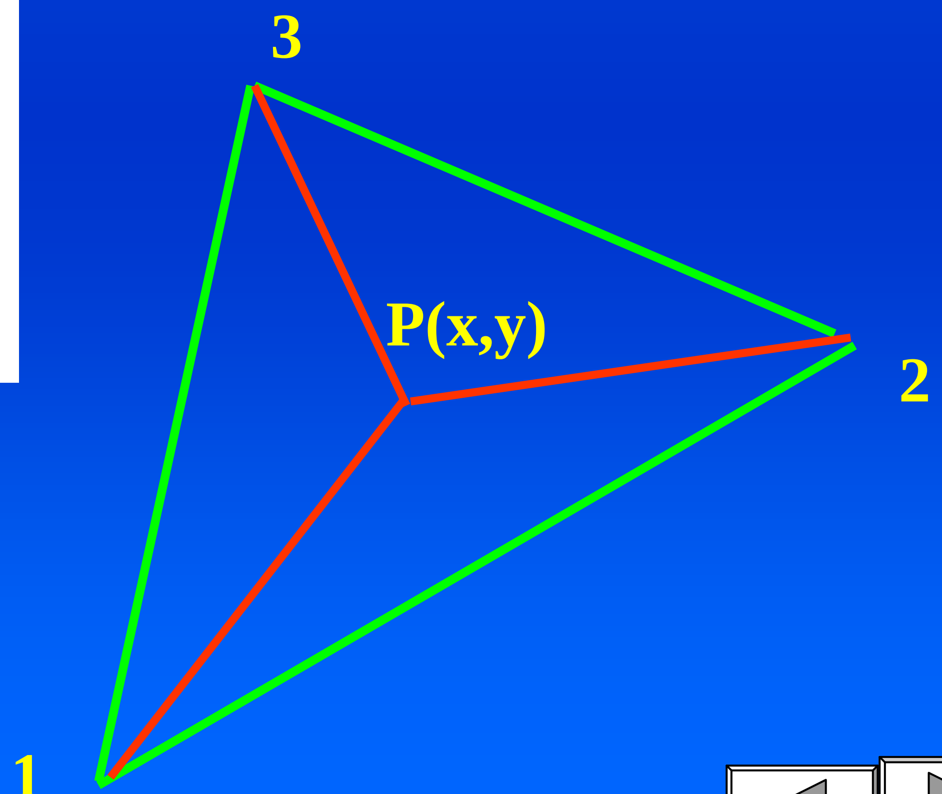
形矩阵

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$
$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3$$

$$N_1 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$N_2 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$N_3 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$



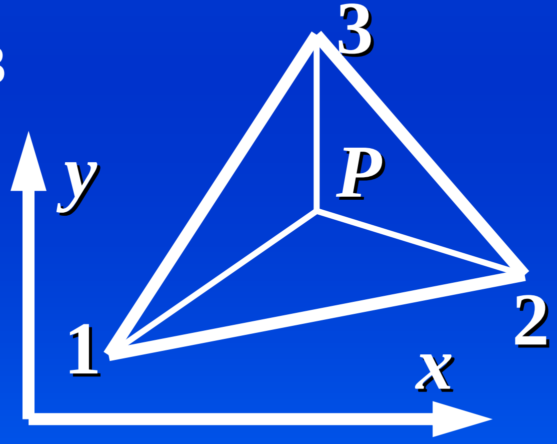
形函数

引入面积坐标

$$L_1 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = A_{P23}/A_{123}$$

$$L_2 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = A_{P31}/A_{123}$$

$$L_3 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = A_{P12}/A_{123}$$



$N_1=L_1$，$N_2=L_2$，$N_3=L_3$

$$L_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i x + c_i y)$$

$$i, j, k = 1,2,3$$

$$a_i = x_j y_k - y_j x_k$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = -x_j + x_k$$

4.4 解答的收敛性准则

1) 位移模式（也称位移函数）必须包含刚体位移。

2) 位移模式必须包含常应变位移。

3) 位移模式必须保证单元间位移协调。

1)、2) 对平面问题也即要求具有常数项和坐标一次项，这称作“完备性准则”。

3) 称作“协调性准则”。既完备又协调的单元一定是收敛的。但不等于说非协调单元一定不收敛。

$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$[N] = \big[[N_1] \quad [N_2] \quad [N_3] \big]$$

$$N_i = L_i, i = 1,2,3$$

形函数的性质

1. $$N_i = \begin{cases} 1 & x = x_i\,, y = y_i \\ 0 & x \neq x_{i,} y \neq y_i \end{cases}$$

2. $$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

{d}=[N]{a}

应变

$$\{\varepsilon\} = [A]^T\{d\}$$

$$\{\varepsilon\} = [A]^T\{d\} = [A]^T[N]\{a\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\}$$

$$[B]=[A]^T[N]$$

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$[B]=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

应力

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

平面应力

$$\{\sigma\} = [D][B]\{a\}$$

结点力

由虚功原理：

在一个平衡状态（u,ε,σ），

设有虚位移{a*}，对应的应变为{ε*}=[B]{a*}，

则：

$$\{a^*\}^T\{F\}=\iiint_{Ve}\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dV$$

$$=\iiint_{Ve}\{a^*\}^T[B]^T\{\sigma\}dV$$

$$\{F\}=\iiint_{Ve}[B]^T\{\sigma\}dV$$

$$=\iint_{Se}[B]^T\{\sigma\}tdS$$

$$\{F\} = \iint_{Se} [B]^T \{\sigma\} t dS$$

$$= \iint_{Se} [B]^T [D][B]\{a\} t dS$$

$$= [B]^T [D][B] t\Delta\{a\}$$

$$\{F\} = [k]\{a\}$$

$$[k] = [B]^T [D][B] t\Delta$$

单元刚度阵

有限元方程

作业:
计算单元刚度阵
P167
7-1,
7-3

4.5 单元刚度阵的另一推导

总势能:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \iiint_V \{T\}^T \{u\} dV - \iint_{S_1} \{\bar{T}\}^T \{u\} dS$$

不计体力:

$$\Pi = \frac{1}{2}\{a\}^T [B]^T [D][B]\{a\} t\Delta - \{a\}^T \{F\}$$

由最小势能原理:

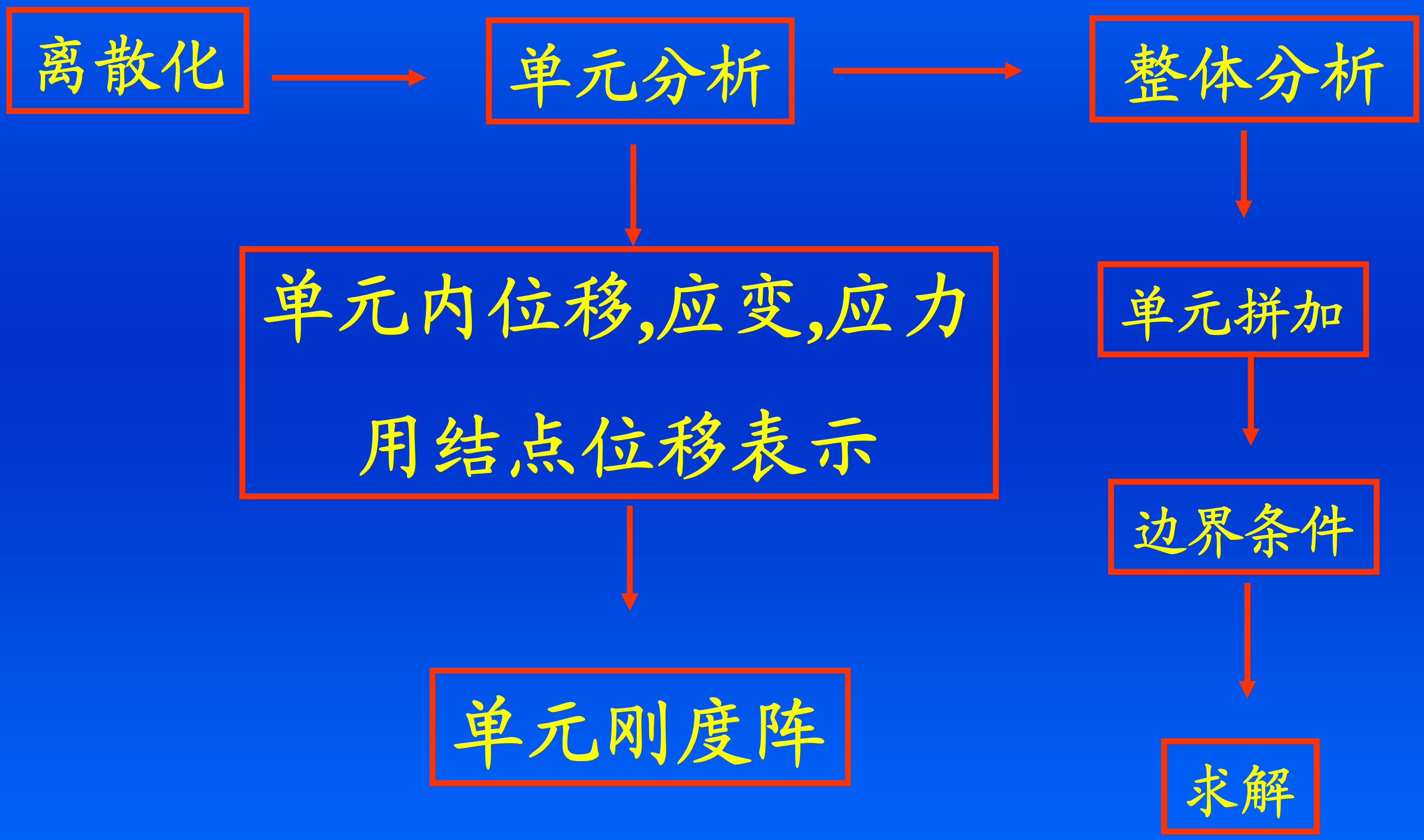
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{a\}} = 0$$

$$[B]^T [D][B]\{a\}t\Delta - \{F\} = 0$$

$$[k]\{a\} = \{F\}$$

$$[k] = [B]^T [D][B]t\Delta$$

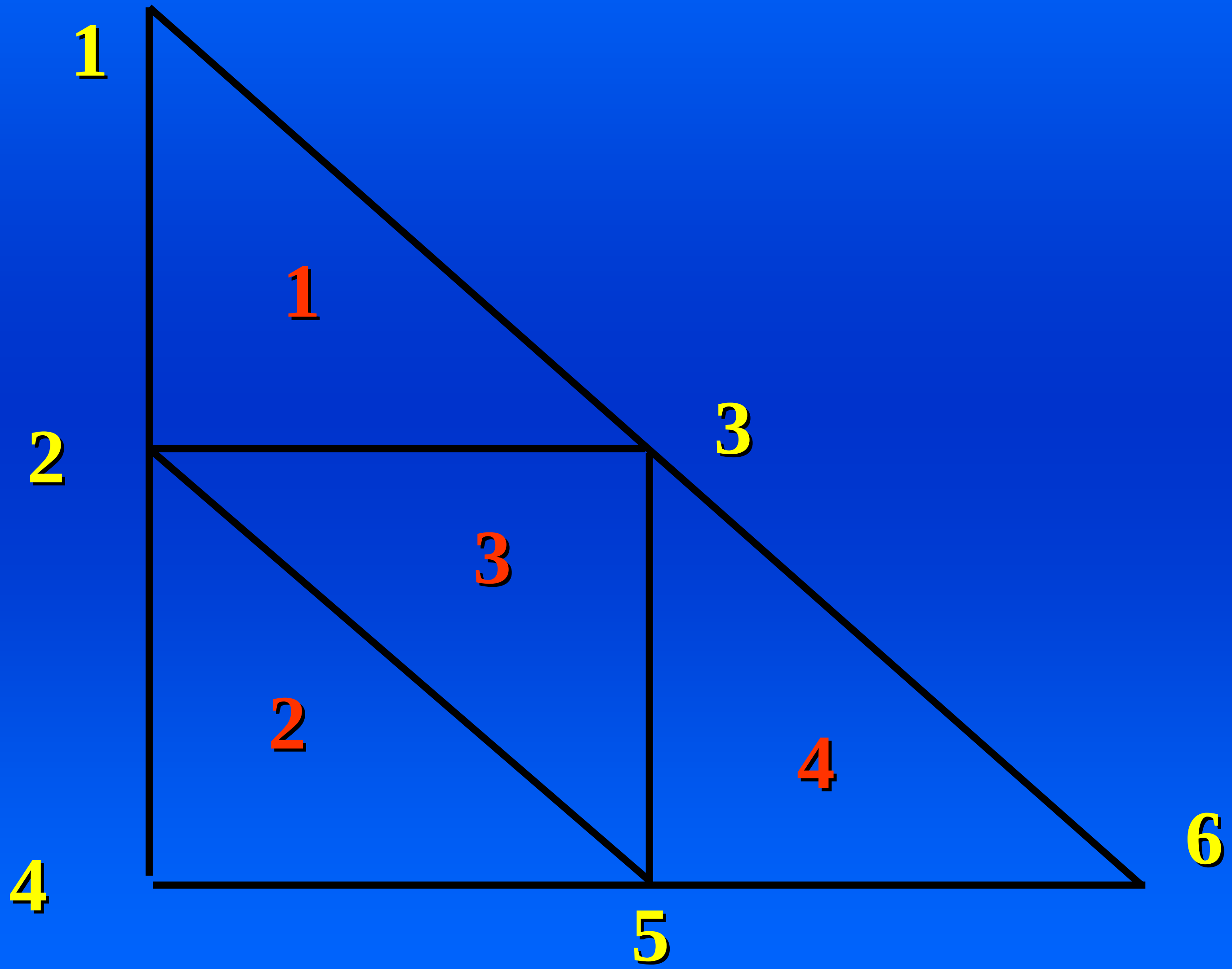
4.6 整体分析



整体分析的步骤

建立整体刚度矩阵 → 引入支承条件 → 解方程求位移 → 求应力

总体刚度阵的形成:



$$
\begin{bmatrix}
x & x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x \\
x & x & x & x & x & x
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix},
\quad [k]_1\{a\}_1 = \{F\}_1
$$

$$
\begin{bmatrix}
x & x & x & x & x & x & .. & 0 \\
x & x & x & x & x & x & .. & 0 \\
x & x & x & x & x & x & .. & 0 \\
x & x & x & x & x & x & .. & 0 \\
x & x & x & x & x & x & .. & 0 \\
x & x & x & x & x & x & .. & 0 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_6 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ .. \\ 0 \end{Bmatrix},
\quad [K]_1\{a\} = \{\hat{F}\}_1
$$

$$\begin{bmatrix} y & y & y & y & y & y \\ y & y & y & y & y & y \\ y & y & y & y & y & y \\ y & y & y & y & y & y \\ y & y & y & y & y & y \\ y & y & y & y & y & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \end{Bmatrix}, \quad [k]_2 \{a\}_2 = \{F\}_2$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & y & y & 0 & 0 & y & y & y & y & 0 & 0 \\
0 & 0 & y & y & 0 & 0 & y & y & y & y & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & y & y & 0 & 0 & y & y & y & y & 0 & 0 \\
0 & 0 & y & y & 0 & 0 & y & y & y & y & 0 & 0 \\
0 & 0 & y & y & 0 & 0 & y & y & y & y & 0 & 0 \\
0 & 0 & y & y & 0 & 0 & y & y & y & y & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_2 \\ V_2 \\ 0 \\ 0 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

$$
[K]_2\{a\} = \{\hat{F}\}_2
$$

总刚和总荷载:

$$[K]=[K]_1+[K]_2+....+[K]_4$$

$$\{F\}=\{\hat{F}\}_1+\{\hat{F}\}_2+....+\{\hat{F}\}_4$$

最后的有限元方程:

$$[K]\{a\}=\{F\}$$

总刚的性质：

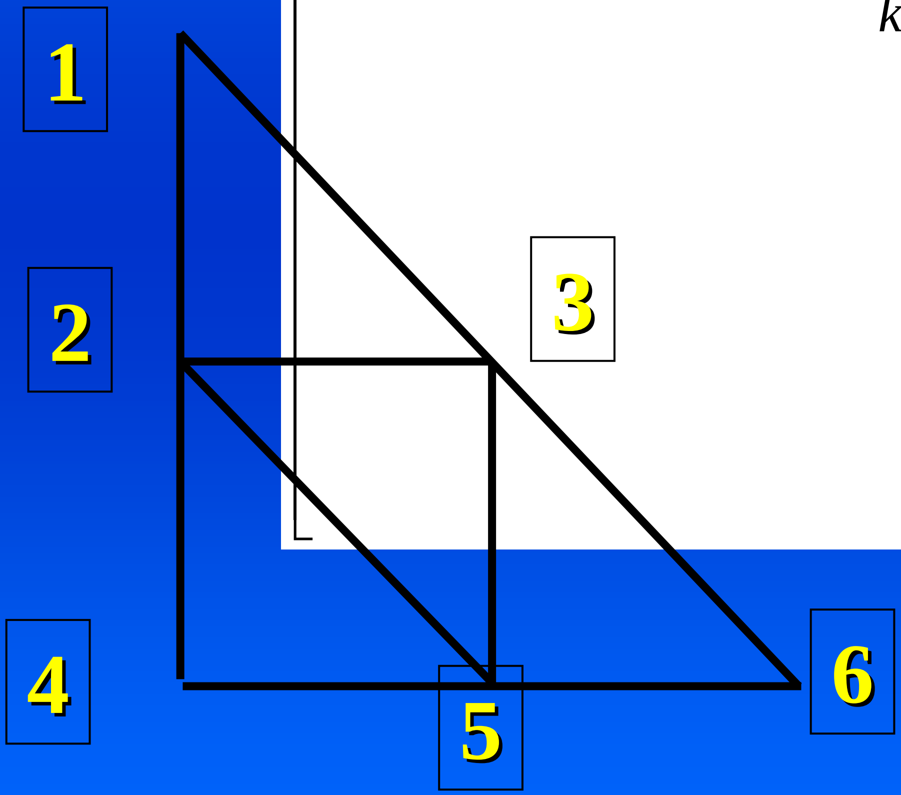
1.对称性

2.稀疏性 → 与结点编号有关

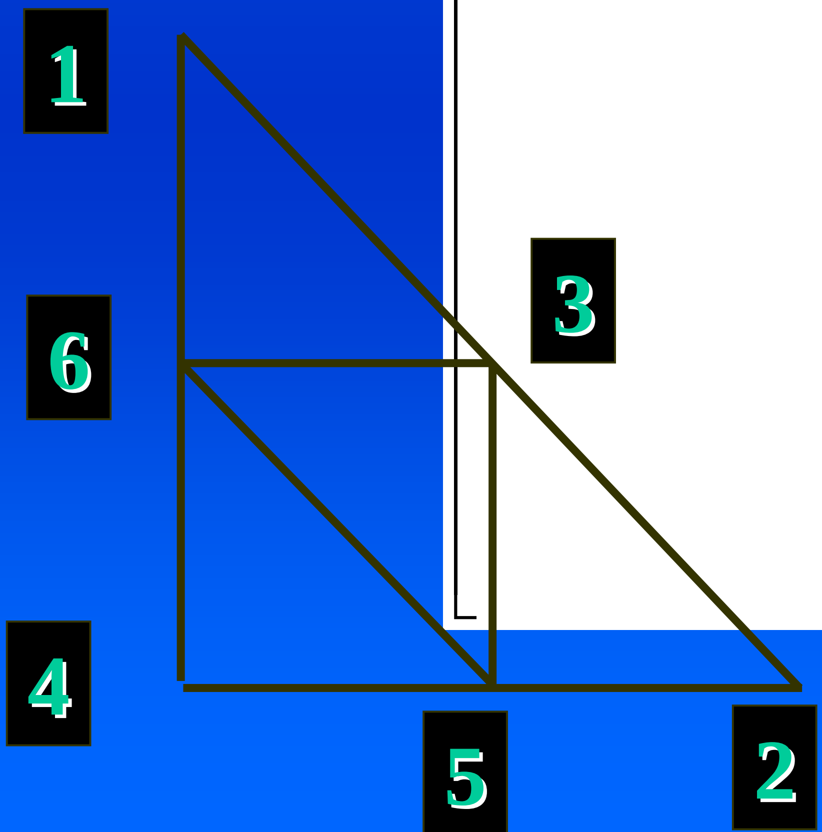
3.带状性 → 与结点编号有关

4. 主元大于0

$$
\begin{bmatrix}
k & k & k & k & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & k & k & k & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & k & k & k & k & k & k & k & k & 0 & 0 \\
 & & & k & k & k & k & k & k & k & 0 & 0 \\
 & & & & k & k & 0 & 0 & k & k & k & k \\
 & & & & & k & 0 & 0 & k & k & k & k \\
 & & & & & & k & k & k & k & 0 & 0 \\
 & & & & & & & k & k & k & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & k & k & k & k \\
 & & & & & & & & & k & k & k \\
 & & & & & & & & & & k & k \\
 & & & & & & & & & & & k
\end{bmatrix}
\quad
\begin{matrix}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12
\end{matrix}
$$



$$
\begin{bmatrix}
k & k & 0 & 0 & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & k & k \\
 & k & 0 & 0 & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & k & k \\
 & & k & k & k & k & 0 & 0 & k & k & 0 & 0 \\
 & & & k & k & k & 0 & 0 & k & k & 0 & 0 \\
 & & & & k & k & 0 & 0 & k & k & k & k \\
 & & & & & k & 0 & 0 & k & k & k & k \\
 & & & & & & k & k & k & k & k & k \\
 & & & & & & & k & k & k & k & k \\
 & & & & & & & & k & k & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & k & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & k & k \\
 & & & & & & & & & & & k
\end{bmatrix}
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}
$$



4.7 边界条件的引入

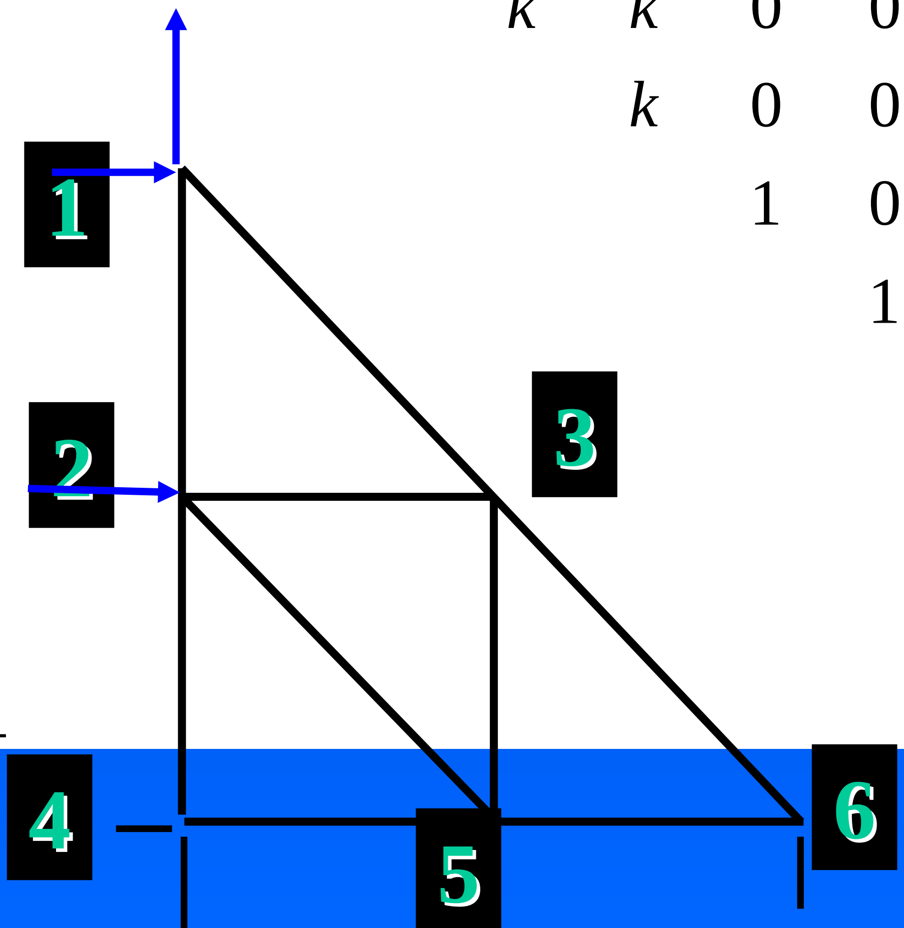
1. 总刚的修改:

受约束的自由度对应的主元=1,
该行和列的其他元素=0.

2. 荷载列阵的修改:

受约束自由度的荷载项=0

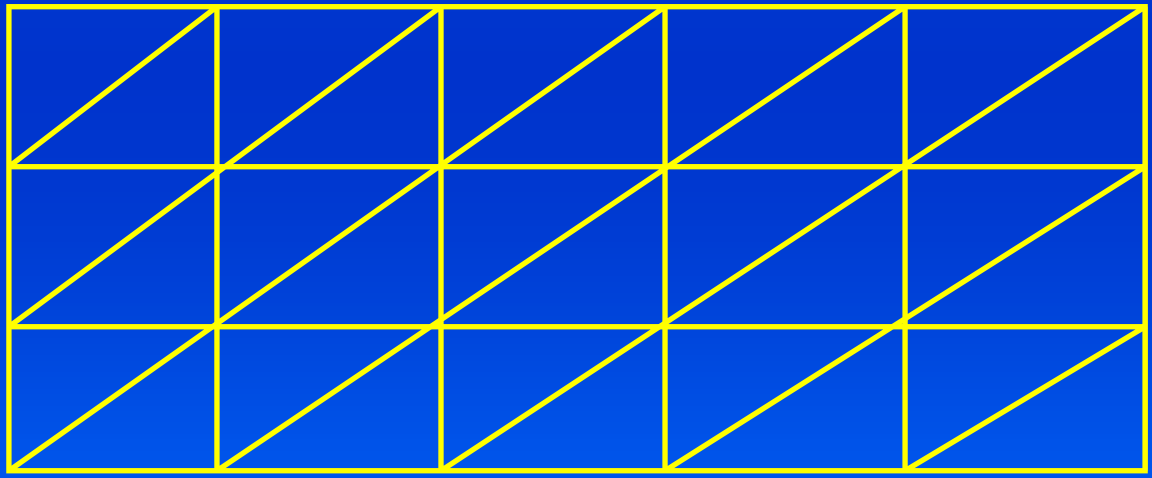
$$
\begin{array}{c}
1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12
\end{array}
\begin{bmatrix}
k & k & k & k & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & k & k & k & k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & k & k & k & k & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\
 & & & k & k & k & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & k & k & 0 & 0 & k & 0 & k & 0 \\
 & & & & & k & 0 & 0 & k & 0 & k & 0 \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & k & 0 & k & 0 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & k & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{Bmatrix}
p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{x2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{Bmatrix}
$$



作业:
计算总体刚度阵
P167
7-5,
求解位移
7-4

补充作业1:

1. 对下列有限元划分，进行合理的最佳节点编号和单元编号



补充作业2:

2. 对下列有限元划分，进行合理的最佳节点编号和单元编号