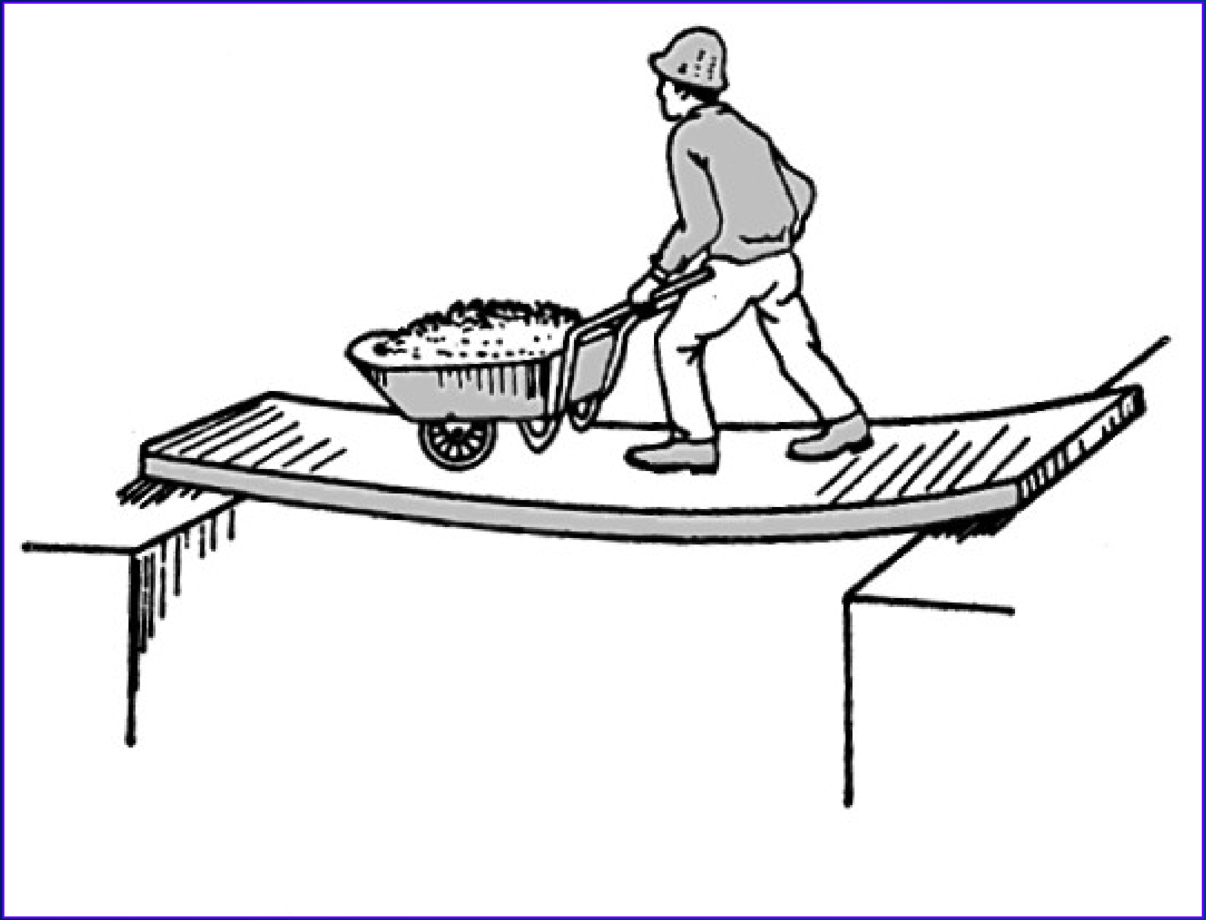
第八章　弯曲变形 Bending deformation

工程中的弯曲变形现象



赠言：

大过，栋橈，利有攸往，亨。

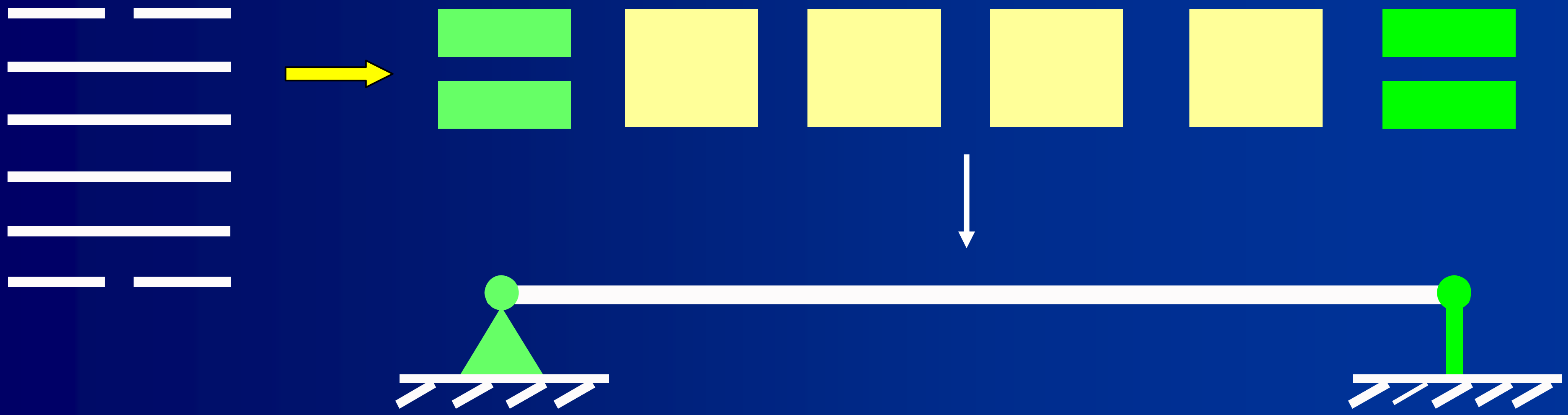
《周易上经 · 大过》

注释：

- 大过，卦名；非常过度的意思 ䷛
- 栋，即梁
- 橈（rao），挠（nao）曲的树木称为橈
- 攸，即所；利有攸往，意思——有利于所往的方向
- 亨，亨通

理解：

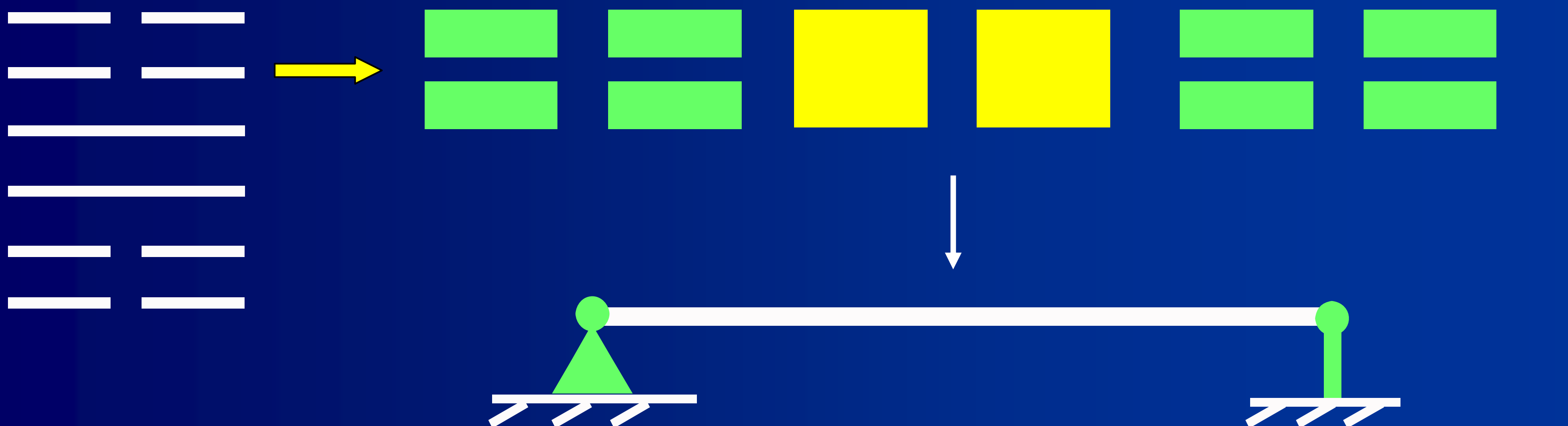
事物发展得非常过度，好象栋梁挠曲，有利于所往方向的继续发展，达到亨通。

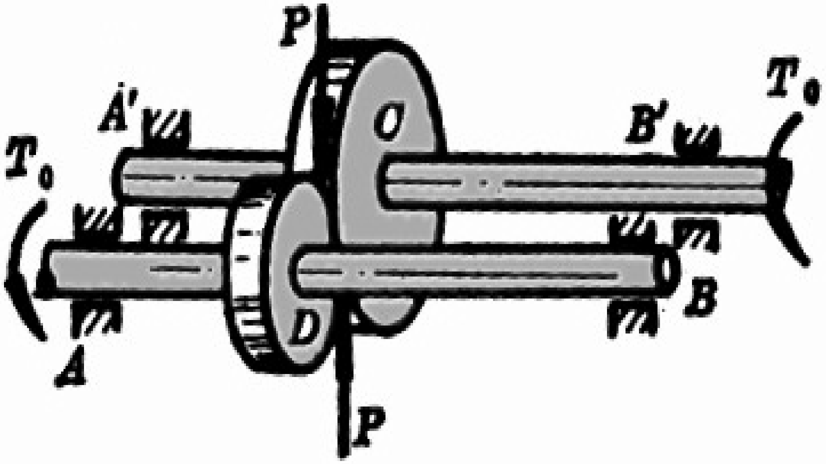


以上理解有2个关键：1、横看卦象；2、阴爻看成支座。

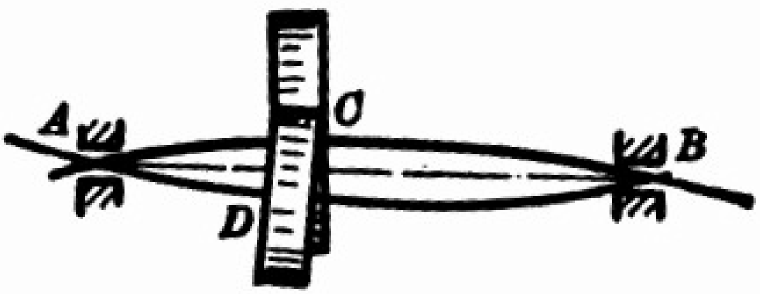
“小过”卦可以佐证 ——

小过，亨，利贞，可小事，不可大事，…

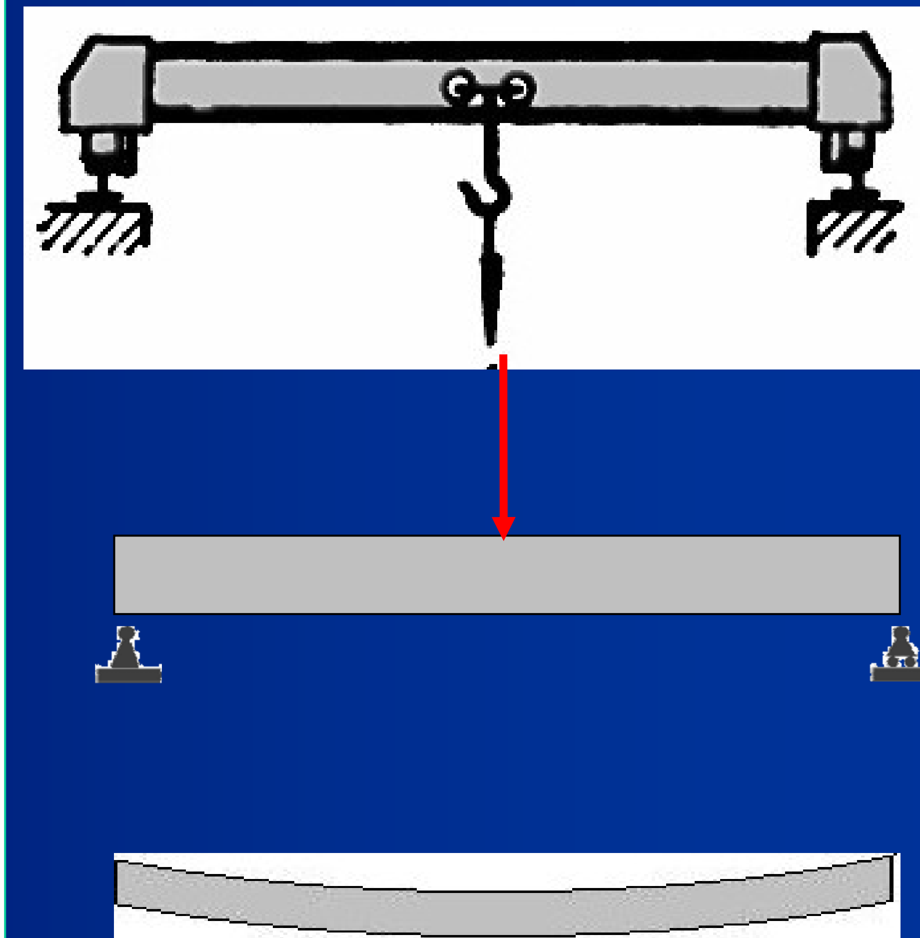




(a)



(b)



工程上的梁变形问题不容忽视

- 影响使用
- 引发破坏
- 产生不安全感

工程上对梁变形效应的利用

- 减少冲击、振动
- 利用变形作为开关
- 提高性能

弯曲问题的分析过程：

弯曲内力　　弯曲应力　　弯曲变形

解决刚度问题

尽量从理论上分析 —— 一般

然后实验上验证 —— 个别

梁变形问题研究什么量？

拉压 →	伸长量
扭转 →	转角
弯曲 →	挠度**deflection** 转角**rotation**

本章的任务

1. 建立小变形 挠度、转角曲线 微分方程

2. 用 积分法 和 叠加法 求梁的挠度和转角

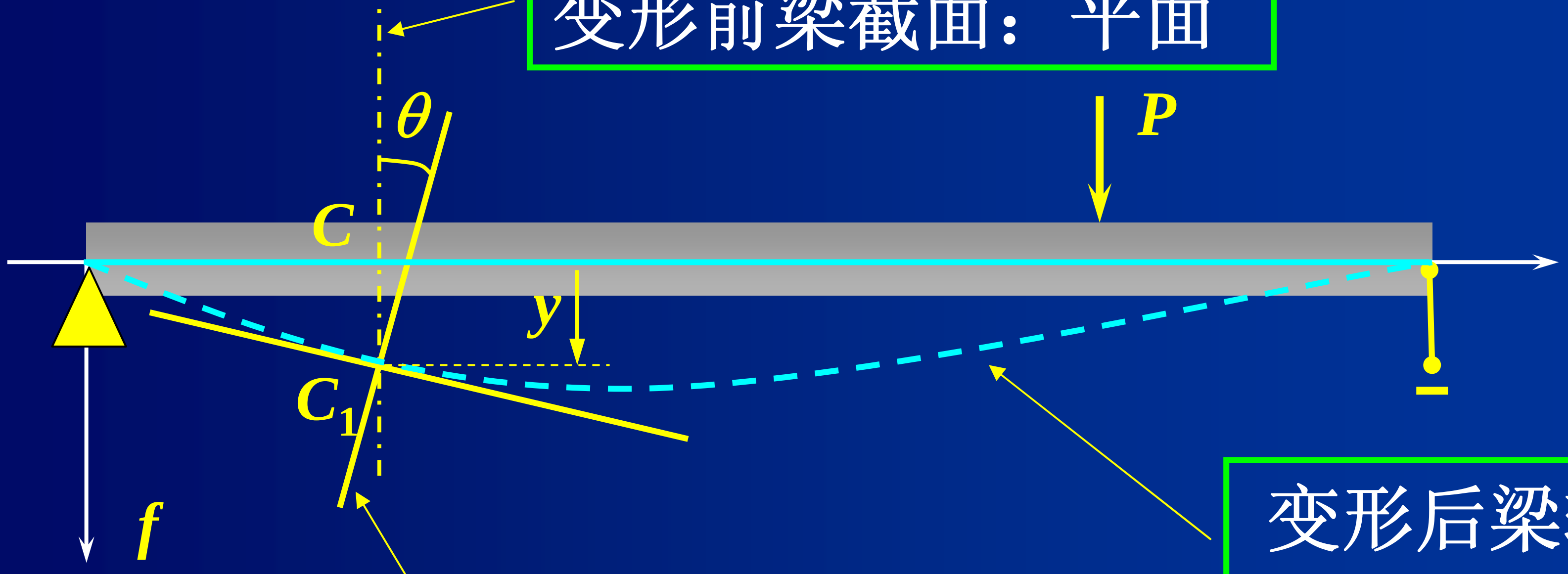
研究范围：等直梁在弯曲时（线、角）位移的计算

研究目的：①对梁作刚度校核

②解超静定梁

8.1 梁变形的基本概念
Basic concepts of beam deformation

变形前梁截面：平面



变形后梁轴线挠曲线

变形后梁截面：仍为平面

挠度：y

梁截面转角：θ

1. 挠度：横截面形心沿垂直于轴线方向的线位移

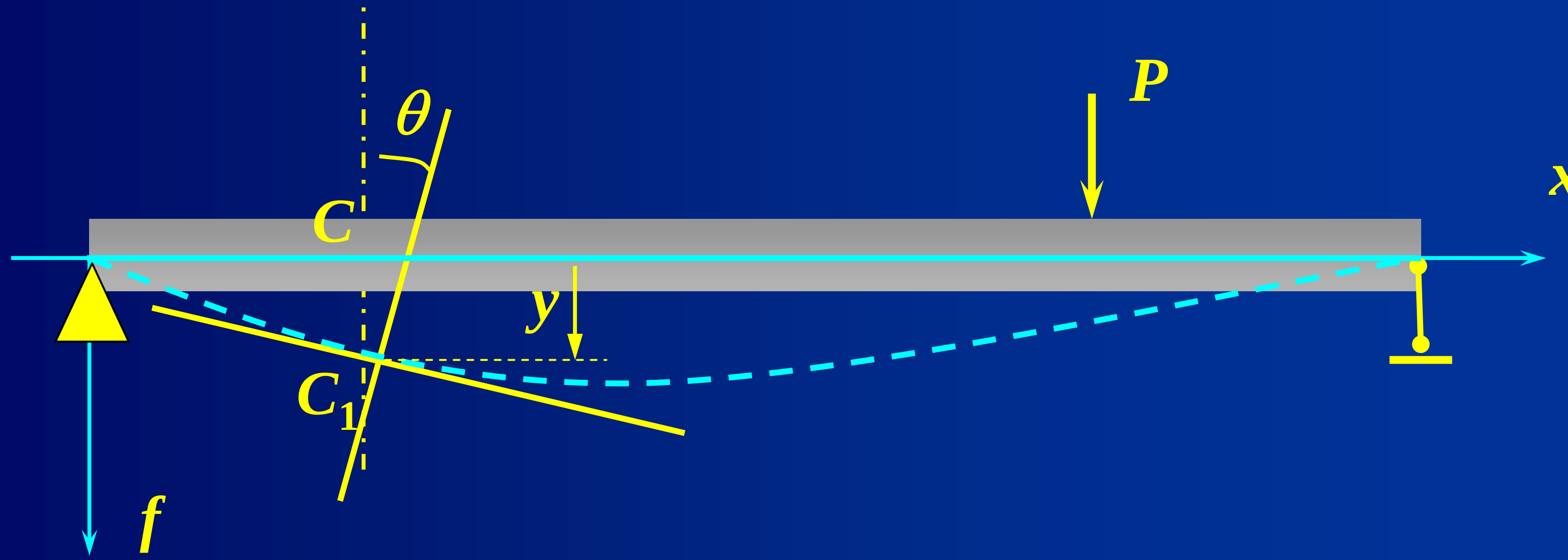
用 y 表示，与坐标 f 同向为正，反之为负

2. 转角：横截面绕其中性轴转动的角度，用 θ 表示

顺时针转动为正，反之为负

3. 挠曲线：梁变形后，轴线变成的光滑曲线

其方程为 $y = f(x)$



4. 转角与挠曲线的关系：

$$\boxed{\mathrm{tg}\theta = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = y'}$$

$$\boxed{\theta = y'}$$

小变形

5. 刚度校核

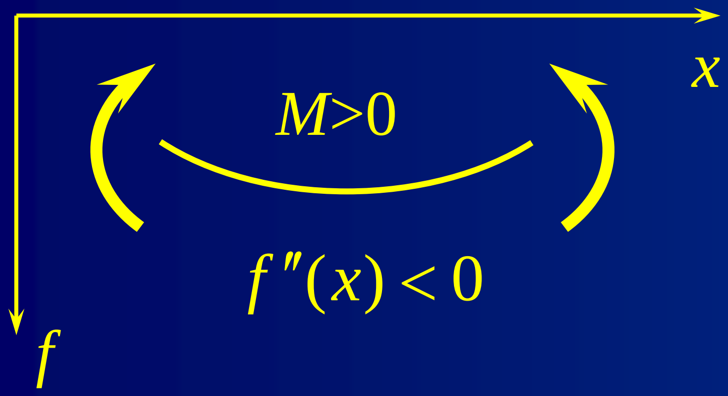
$$\boxed{y_{\max} \leq [y]}$$

$$\boxed{\theta_{\max} \leq [\theta]}$$

许用挠度见[P220]表8.1

8.2 梁挠曲的近似微分方程

Differential Equation of beam deformation



已知曲率为 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M(x)}{EI_z}$

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{f''(x)}{(1+f'^2)^{3/2}} \approx \pm f''(x)$$

为什么略掉分母?

因小变形转角不超过1度（0.0175弧度), 故 $f'^2 \to 0$

$$\therefore\ f''(x)=\pm\frac{M_z(x)}{EI_z}$$

弯矩与2阶导数的符号相反上式取负号, 于是有:

$$f''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

—— 挠曲线近似微分方程

对于等截面直梁，可写成如下形式：

$$EI f''(x) = -M(x)$$

8.3 积分法求梁变形

1. 微分方程的积分

$$EIf''(x) = -M(x)$$

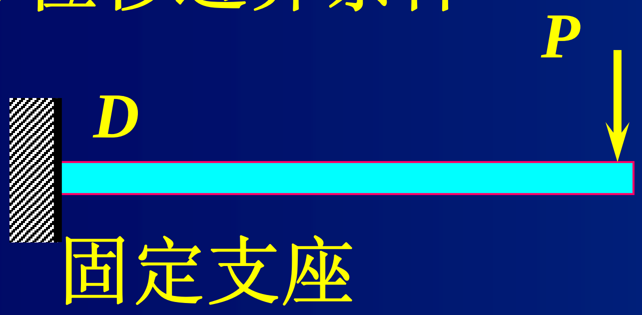
$$EIf'(x) = \int (-M(x))\mathrm{d}x + C_1$$

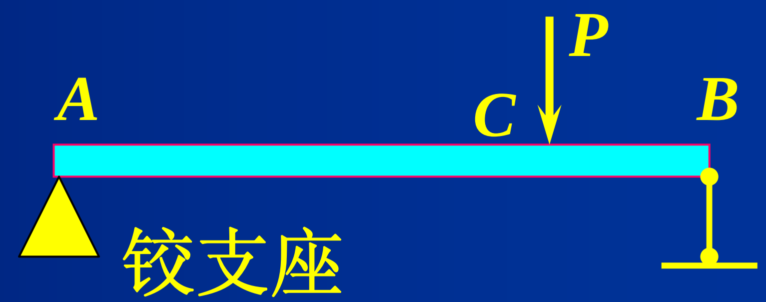
$$EIf(x) = \int (\int (-M(x))\mathrm{d}x)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

$$f(x) = y, \quad f'(x) = \theta$$

利用位移边界条件确定积分常数

2. 位移边界条件





❶支点位移条件

$$f_D = 0 \qquad \theta_D = 0 \qquad\qquad f_A = 0 \qquad f_B = 0$$

❷连续条件

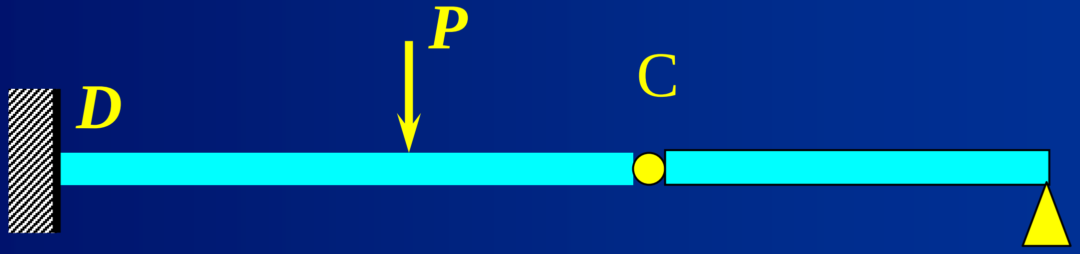
$$f_{C^-} = f_{C^+}$$

或写成 $f_{C左} = f_{C右}$

❸光滑条件

$$\theta_{C^-} = \theta_{C^+}$$

或写成 $\theta_{C左} = \theta_{C右}$



铰连接

$$f_{C左} = f_{C右} \qquad \theta_{C左} \neq \theta_{C右}$$

积分法求梁变形

①适用于小变形、线弹性材料、细长构件的平面弯曲

②可应用于各种载荷的等截面或变截面梁的位移

③积分常数由挠曲线变形的几何相容条件（边界条件、连续条件）确定

④优点——使用范围广，精确；　缺点——计算较繁

$$EI f''(x) = -M(x)$$

积分法求梁变形的基本步骤：

①写出弯矩方程；若弯矩不能用一个函数给出要分段写出

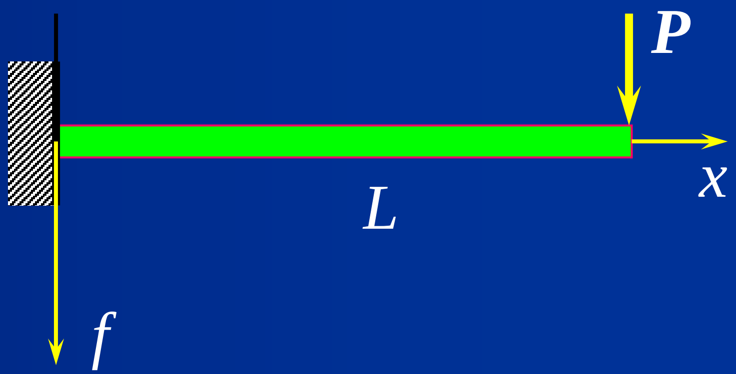
②由挠曲线近似微分方程，积分出转角、挠度函数

③利用边界条件、连续条件确定积分常数

如果分 n 段写出弯矩方程，则有 $2n$ 个积分常数

例1 求等截面直梁的弹性曲线、最大挠度及最大转角

解：



❶建立坐标系并写出弯矩方程

$$M(x) = P(x-L)$$

❷写出微分方程，并积分 $EIf'' = -M(x) = P(L-x)$

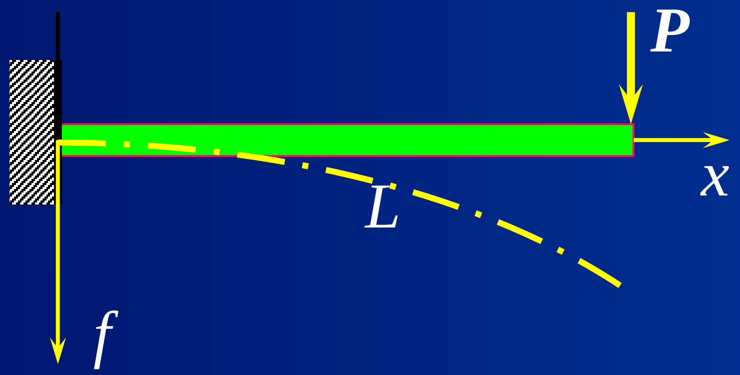
$$EIf' = -\frac{1}{2}P(L-x)^2 + C_1$$

$$EIf = \frac{1}{6}P(L-x)^3 + C_1 x + C_2$$

❸用边界条件求积分常数 $EIf(0) = \frac{1}{6}PL^3 + C_2 = 0$

$$EI\theta(0) = EIf'(0) = -\frac{1}{2}PL^2 + C_1 = 0$$

$$\therefore C_1 = \frac{1}{2}PL^2 ; C_2 = -\frac{1}{6}PL^3$$



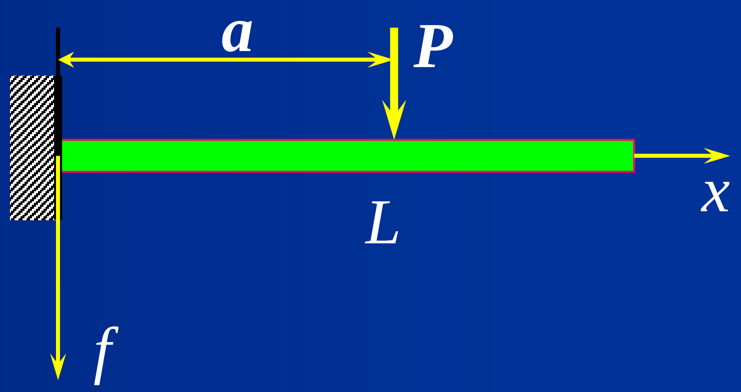
❹写出弹性曲线方程并画出曲线

$$f(x)=\frac{P}{6EI}\left[(L-x)^3+3L^2x-L^3\right]$$

❺最大挠度及最大转角

$$\theta_{\max}=\theta(L)=\frac{PL^2}{2EI}\qquad f_{\max}=f(L)=\frac{PL^3}{3EI}$$

例2. 求梁的变形



解：❶建坐标系、写弯矩方程

$$M(x)=\begin{cases}P(x-a) & (0\le x\le a)\\ 0 & (a\le x\le L)\end{cases}$$

❷写出微分方程，并积分

$$EIf''=\begin{cases}P(a-x) & (0\le x\le a)\\ 0 & (a\le x\le L)\end{cases}$$

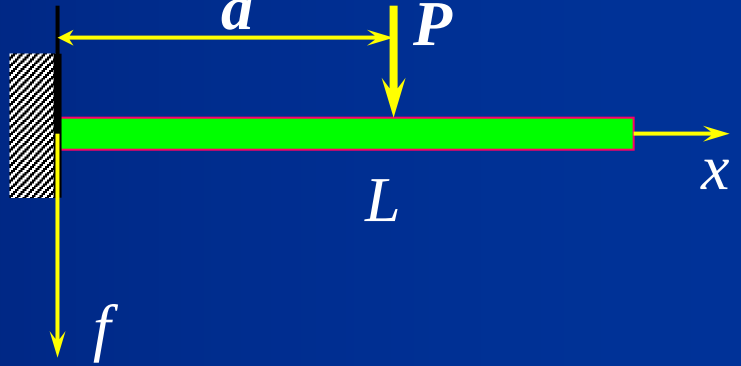
$$EIf'=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}P(a-x)^2+C_1\\ D_1\end{cases}$$

$$EIf=\begin{cases}\dfrac{1}{6}P(a-x)^3+C_1x+C_2\\ D_1x+D_2\end{cases}$$

❸应用位移边界条件和连续条件求积分常数

$$EIf(0)=\frac{1}{6}Pa^3+C_2=0$$

$$EI\theta(0)=-\frac{1}{2}Pa^2+C_1=0$$



$$\theta(a^-)=\theta(a^+) \qquad \therefore C_1=D_1$$

$$f(a^-)=f(a^+)$$

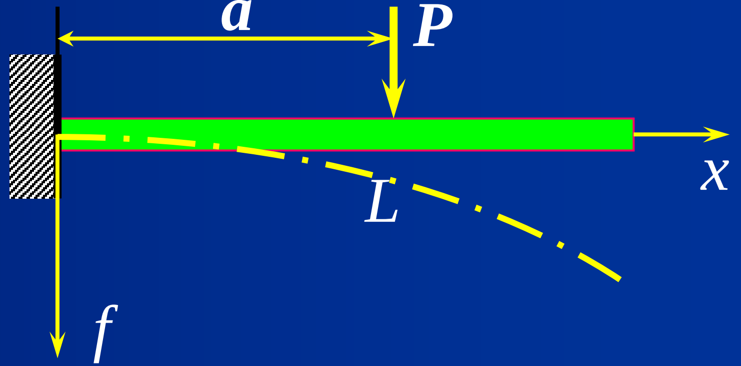
$$\therefore C_1a+C_2=D_1a+D_2$$

$$\therefore C_1=D_1=\frac{1}{2}Pa^2;C_2=D_2=-\frac{1}{6}Pa^3$$

❹写出弹性曲线方程并画出曲线

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{P}{6EI}\left[(a-x)^3+3a^2x-a^3\right] & (0\le x\le a)\\[2ex] \dfrac{P}{6EI}\left[3a^2x-a^3\right] & (\mathrm{a}\le x\le L)\end{cases}$$

❺最大挠度及最大转角

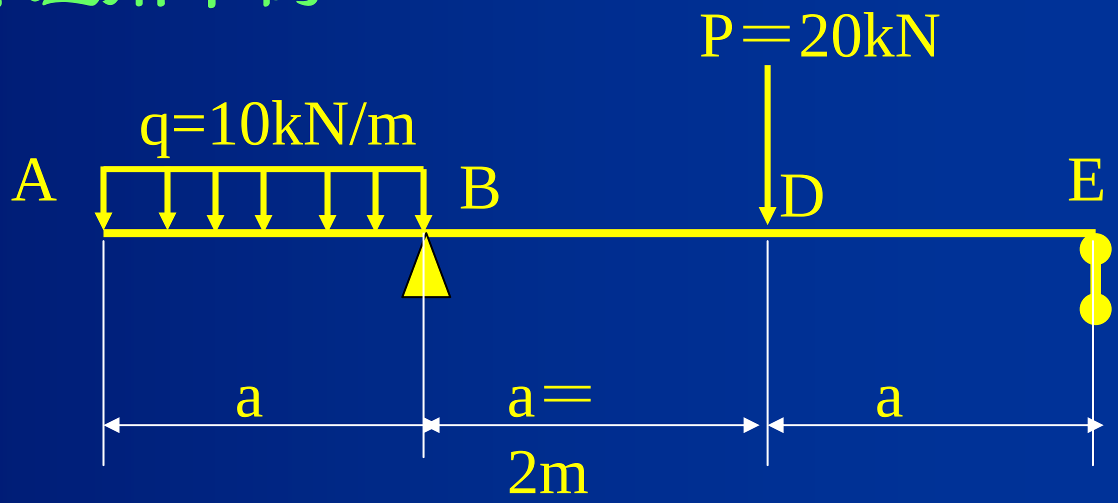


$$\theta_{\max}=\theta(a)=\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$f_{\max}=f(L)=\frac{Pa^2}{6EI}\left[3L-a\right]$$

总结：分段求弯矩，分段积分
利用边界条件、连续条件求常数

边界条件、连续条件应用举例

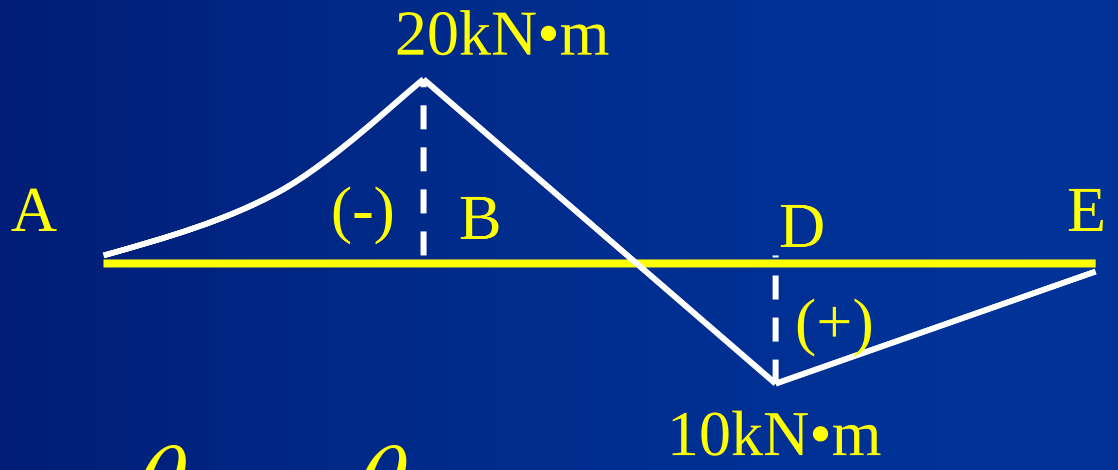


弯矩图三段，共**6**个积分常数

需**6**个待定条件=

3个边界条件+

3个连续条件



E点：$f_E = 0$

D点：$f_{D^+} = f_{D^-}$， $\theta_{D^+} = \theta_{D^-}$

B点：$f_{B^+} = 0$， $f_{B^-} = 0$， $\theta_{B^+} = \theta_{B^-}$

边界条件、连续条件应用举例

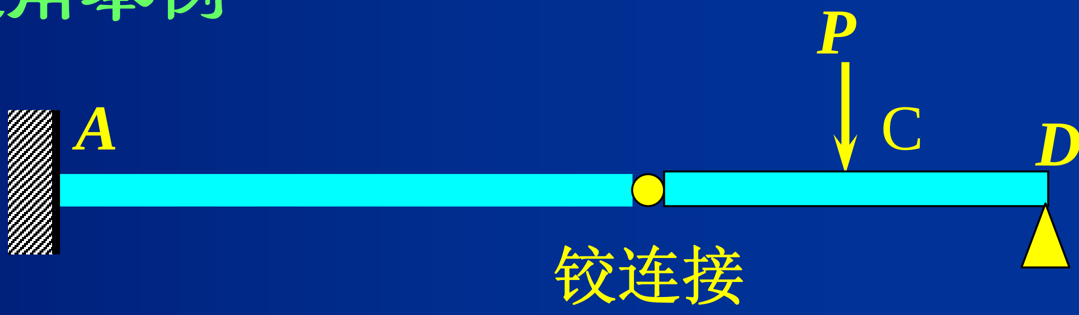
弯矩图分三段，共

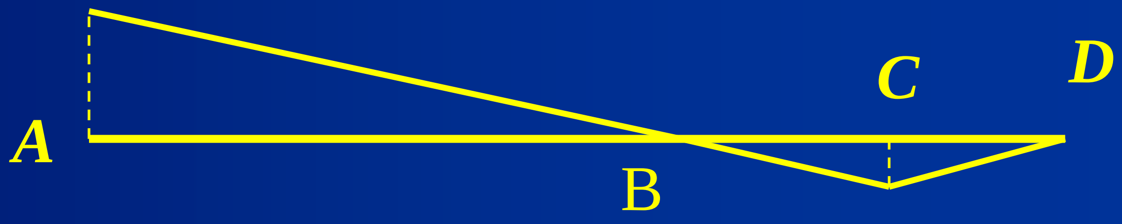
6个积分常数

需6个待定条件=

3个边界条件+

3个连续条件





A点：$f_A = 0, \quad \theta_A = 0$

B 点：$f_{B左} = f_{B右}$

C 点：$f_{C左} = f_{C右} \quad \theta_{C左} = \theta_{C右}$

D点：$f_D = 0$

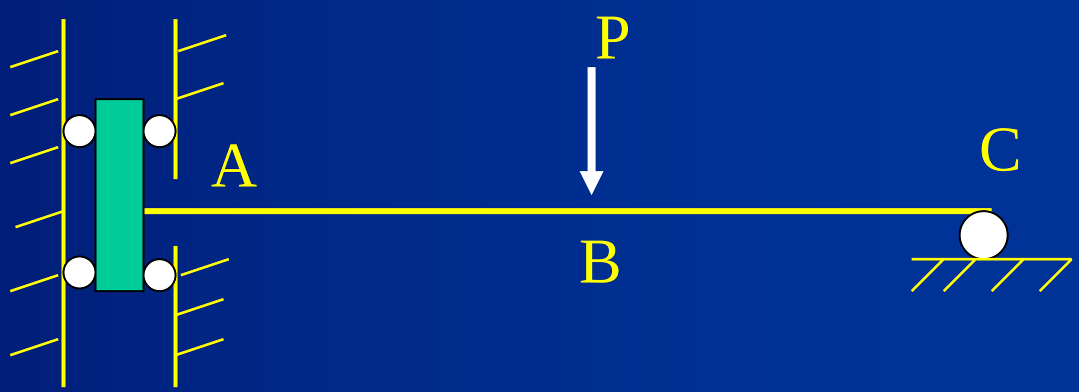
边界条件、连续条件应用举例

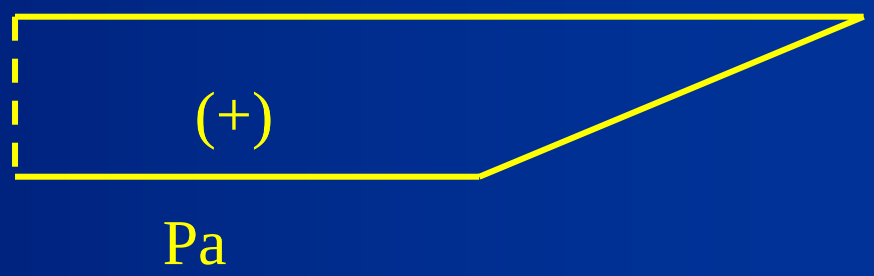
弯矩图分二段，

共**4**个积分常数

需**4**个边界条件

和连续条件





A点：$\theta_A = 0$

B 点： $f_{B左} = f_{B右}$， $\theta_{B左} = \theta_{B右}$

C点：$f_C = 0$

8.4 叠加法求梁变形

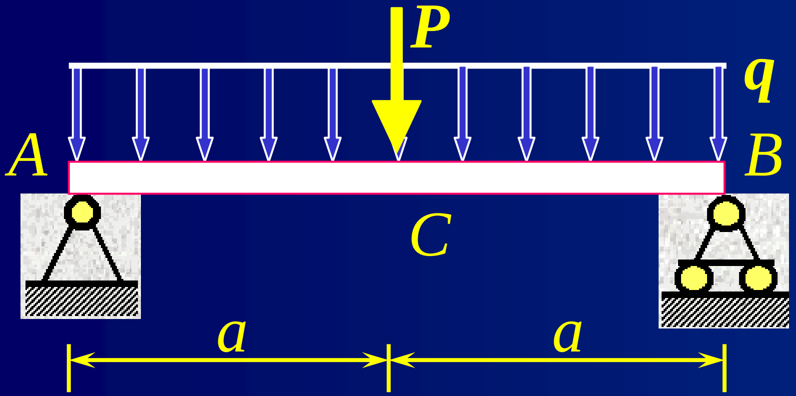
条件：

材料服从郑玄—胡克定律和小变形

挠度和转角均与载荷成线性关系

叠加原理：

承受复杂载荷时，可分解成几种简单载荷，利用简单载荷作用下的位移计算结果，叠加后得在复杂载荷作用下的挠度和转角



例 按叠加原理

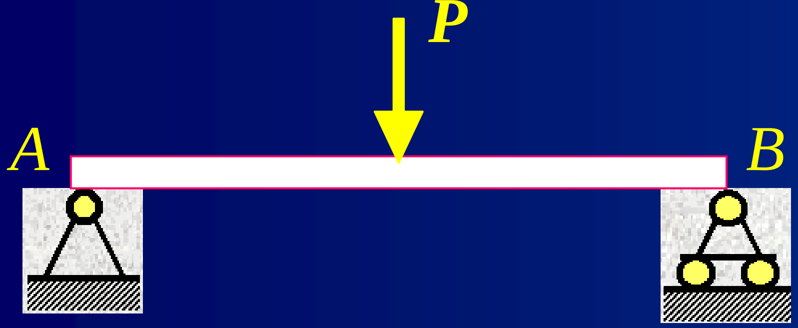
求 A点转角 和 C点挠度

解：❶载荷分解如图

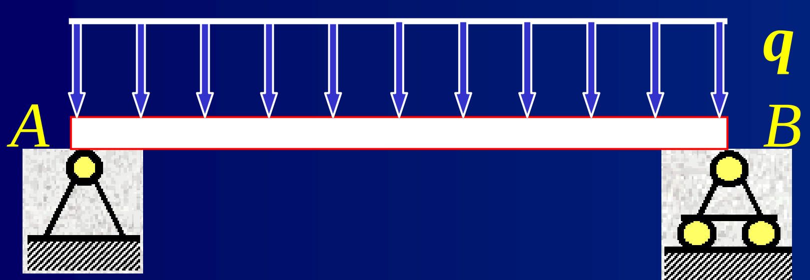
❷查梁的简单载荷变形表，

得到变形

=

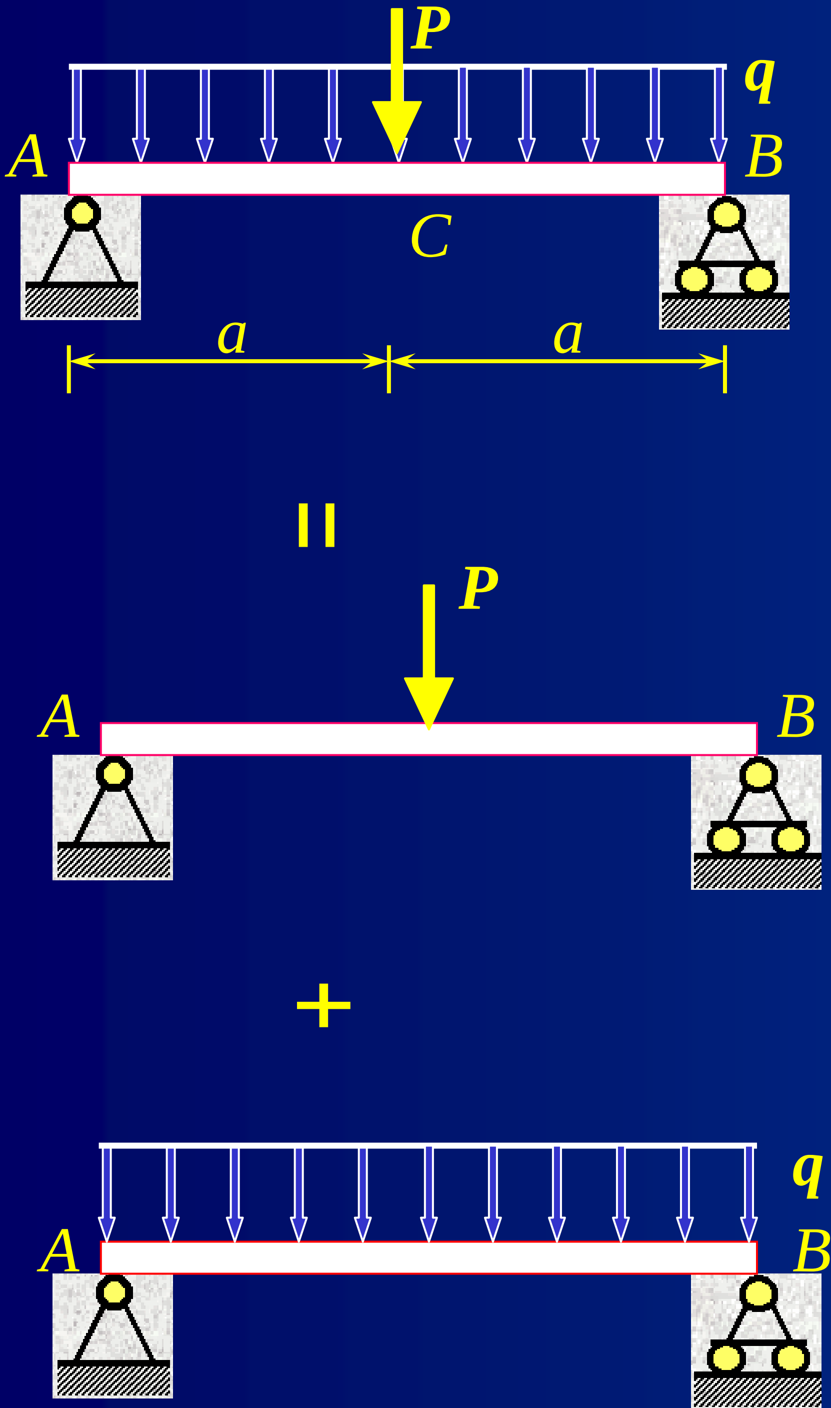


+



$$\theta_{PA} = \frac{Pa^2}{4EI} \qquad f_{PC} = \frac{Pa^3}{6EI}$$

$$\theta_{qA} = \frac{qa^3}{3EI} \qquad f_{qC} = \frac{5qL^4}{24EI}$$



$$\theta_{PA}=\frac{Pa^{2}}{4EI} \qquad f_{PC}=\frac{Pa^{3}}{6EI}$$

$$\theta_{qA}=\frac{qa^{3}}{3EI} \qquad f_{qC}=\frac{5qL^{4}}{24EI}$$

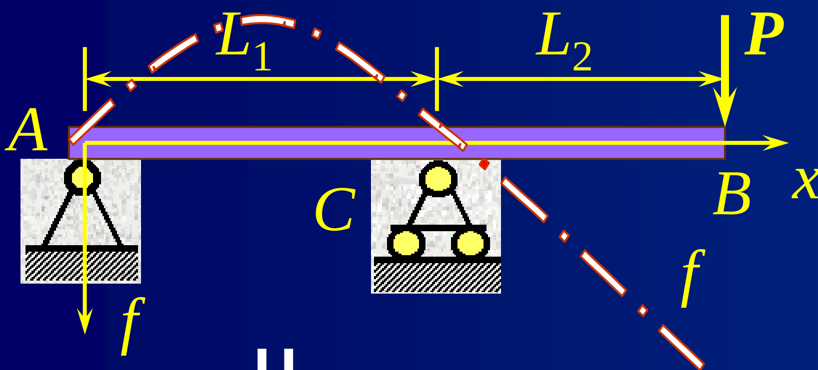
❸叠加

$$\theta_{A}=\theta_{PA}+\theta_{qA}$$

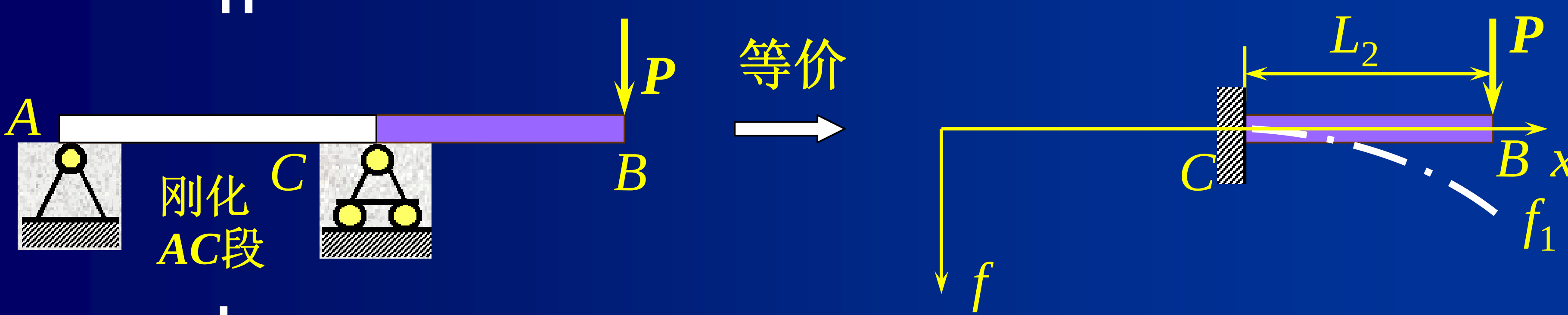
$$=\frac{a^{2}}{12EI}(3P+4qa)$$

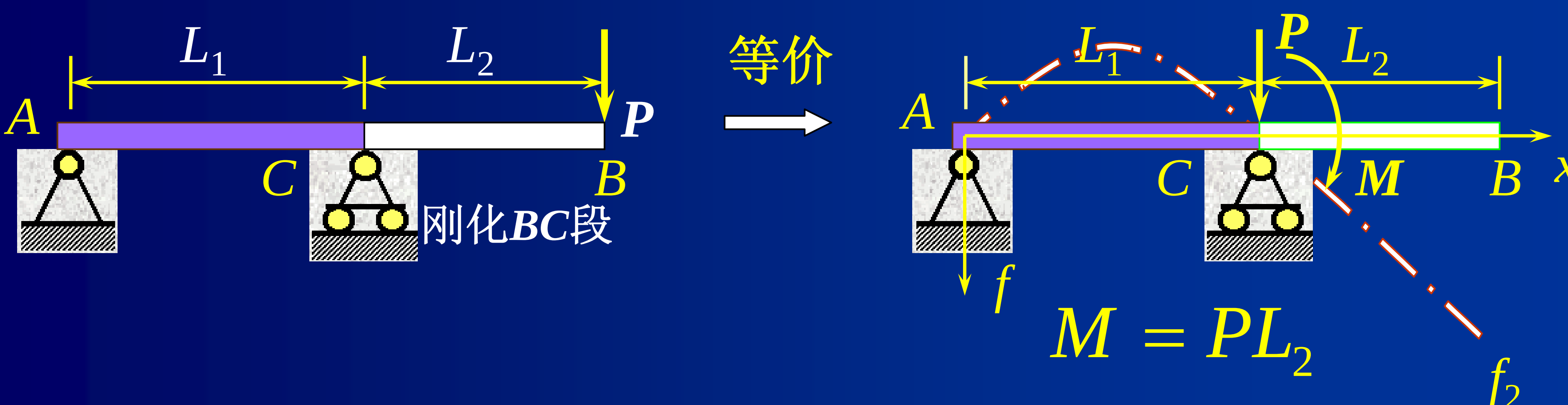
$$f_{C}=\frac{5qa^{4}}{24EI}+\frac{Pa^{3}}{6EI}$$

结构形式叠加（逐段刚化法）原理说明



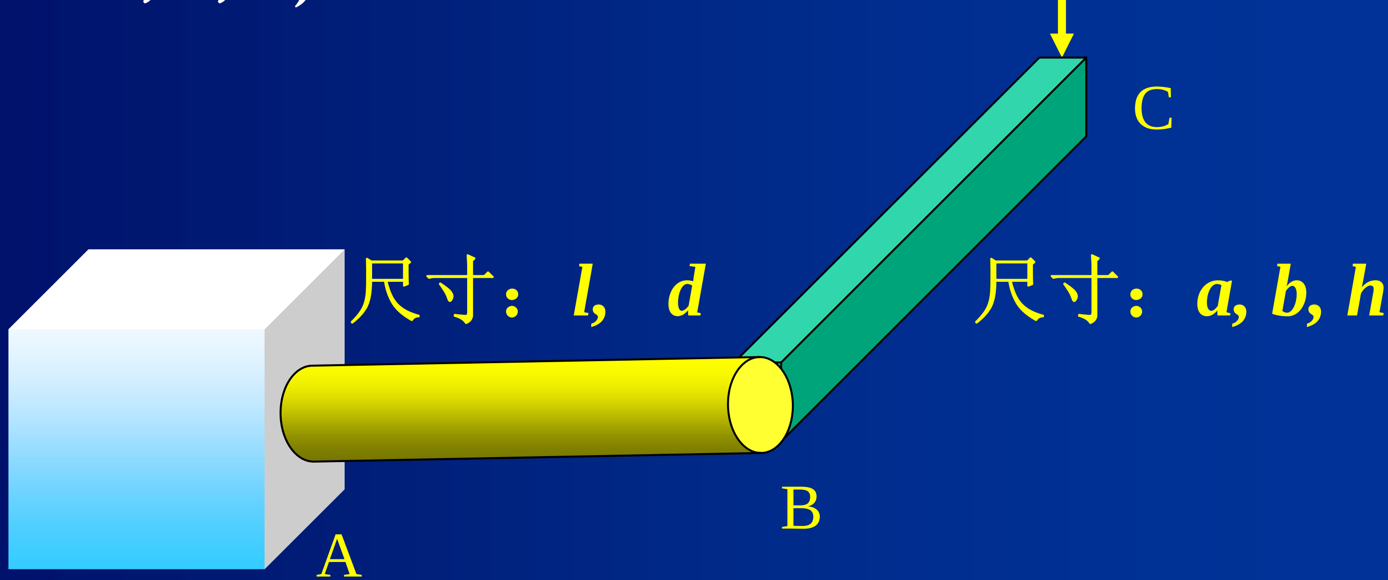
$$f = f_1 + f_2$$





$$M = PL_2$$

例题：已知 P, E, G，求C点铅垂位移



分析：

AB —— 弯曲 + 扭转变形，**BC** —— 弯曲变形

故 **C**点的挠度由三部分组成 ——

- **AB**弯曲引起的**B**点下沉＋
- **AB**扭转引起**C**点位移＋
- **BC**弯曲引起**C**点下沉

解：采用逐段刚化法

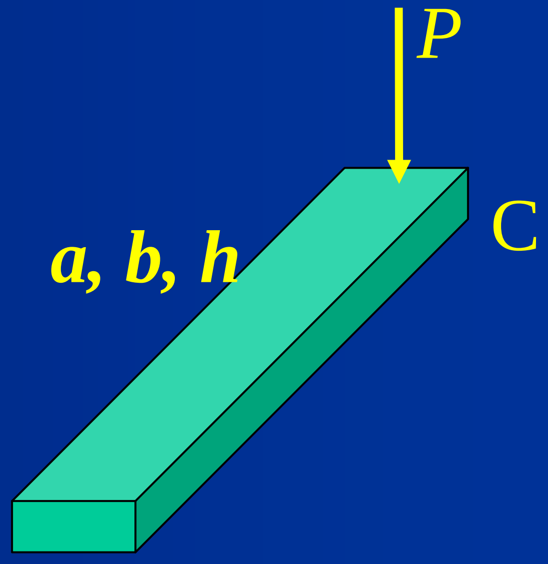
(1)将AB刚化,计算BC弯曲变形引起的

C点的挠度.

$$I_z^{(BC)} = \frac{1}{12} b h^3$$

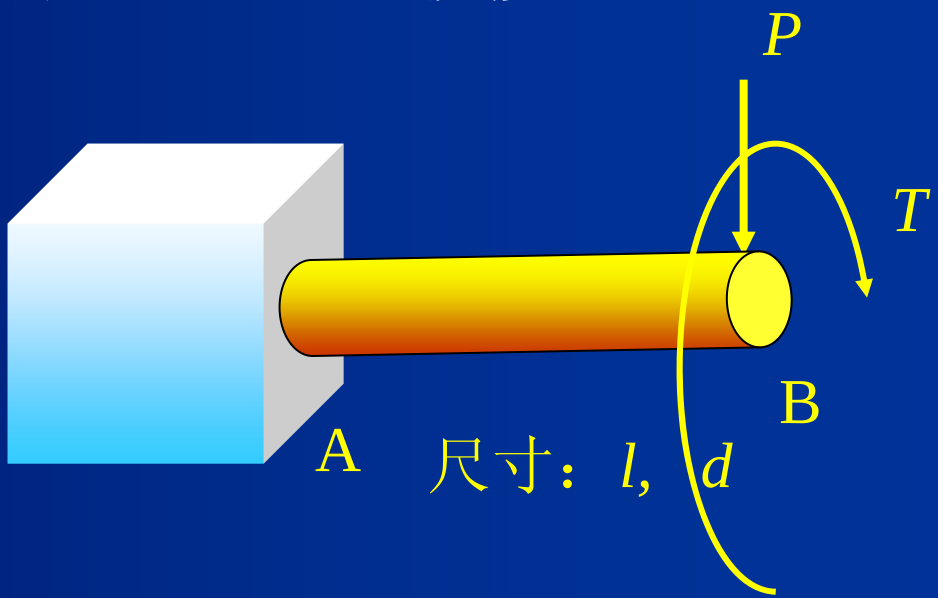
$$f_C^{(1)} = \frac{Pa^3}{3EI_{BC}} = \frac{4Pa^3}{Ebh^3} (\downarrow)$$

尺寸：**a, b, h**



B(固定端)

(2) 将BC刚化, 即去掉BC，但保留BC对AB的作用力，计算AB弯曲引起的C点的挠度



$$I_z^{(AB)} = \frac{1}{64}\pi d^4$$

$$f_C^{(2)} = f_B = \frac{Pl^3}{3EI_{AB}} = \frac{64Pl^3}{3E\pi d^4}(\downarrow)$$

(3) 将BC刚化计算AB扭转变形引起的C点的挠度

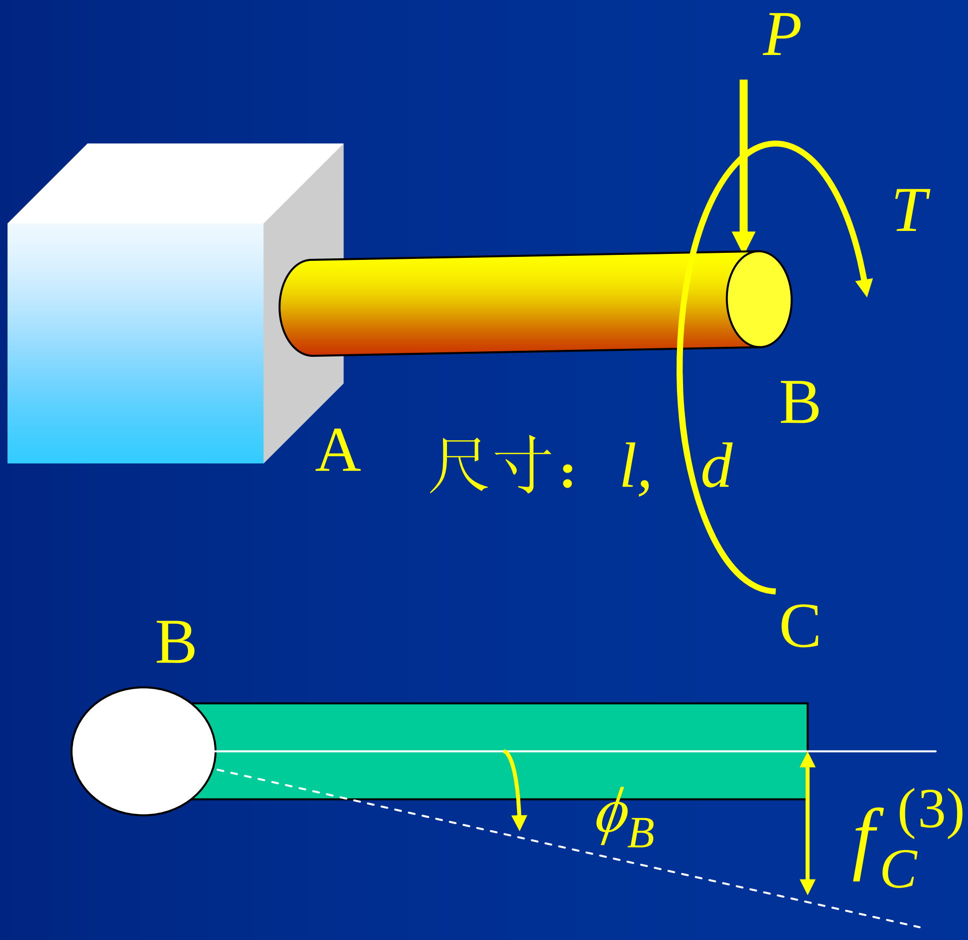
计算B截面扭转角

$$\phi_B = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{Pal}{GI_p} = \frac{32Pal}{G\pi d^4}$$

$$f_C^{(3)} = \phi_B \bullet a = \frac{32Pa^2 l}{G\pi d^4}(\downarrow)$$

所以，C点位移为：

$$f_C = f_C^{(1)} + f_C^{(2)} + f_C^{(3)}$$



8.5 提高弯曲刚度的一些措施

1、减小梁的跨度

2、选择合理截面形状

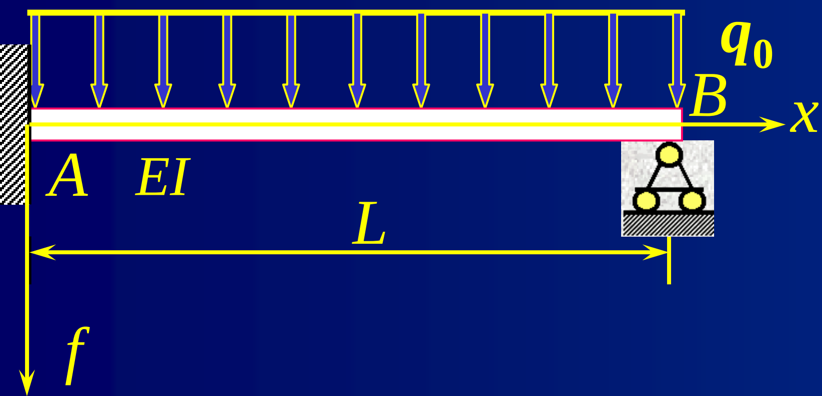
3、改善梁的受力和支座位置

4、预加反弯度

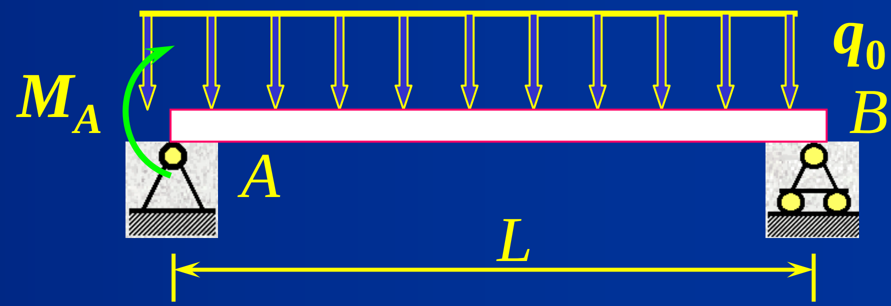
5、增加支座

8.6 用变形比较法解简单超静定梁

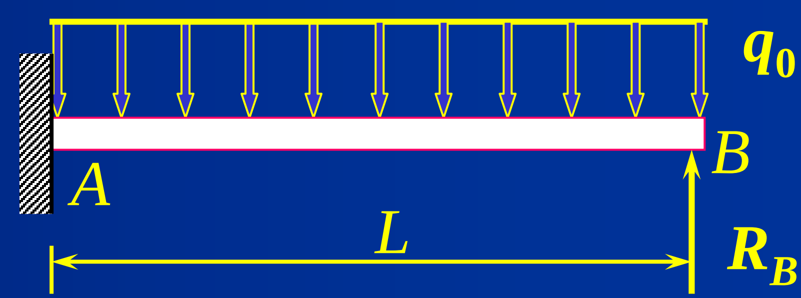
处理方法：3种方程（变形协调、物理、平衡）相结合，求全部未知力



等价



或



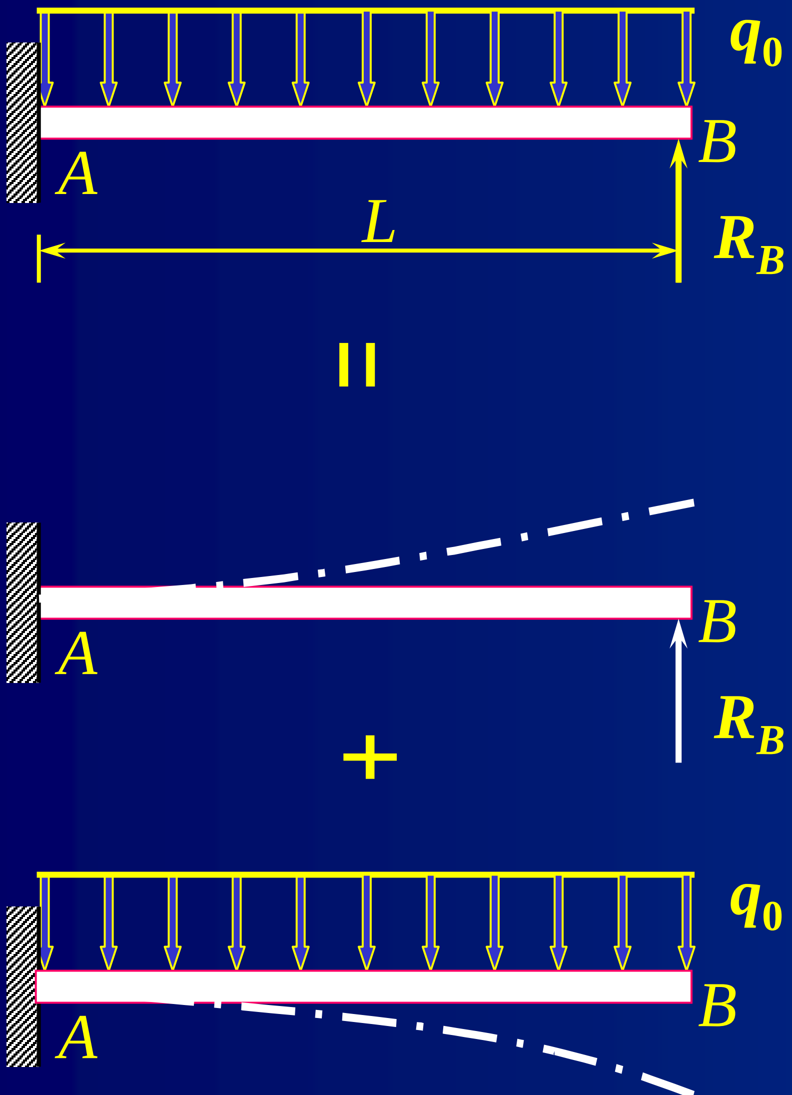
解：❶建立静定基

确定超静定次数

用反力代替多余约束

得新结构

—— 静定基



❷几何方程——变形协调方程

$$f_B = f_{Bq} + f_{BR_B} = 0$$

❸物理方程

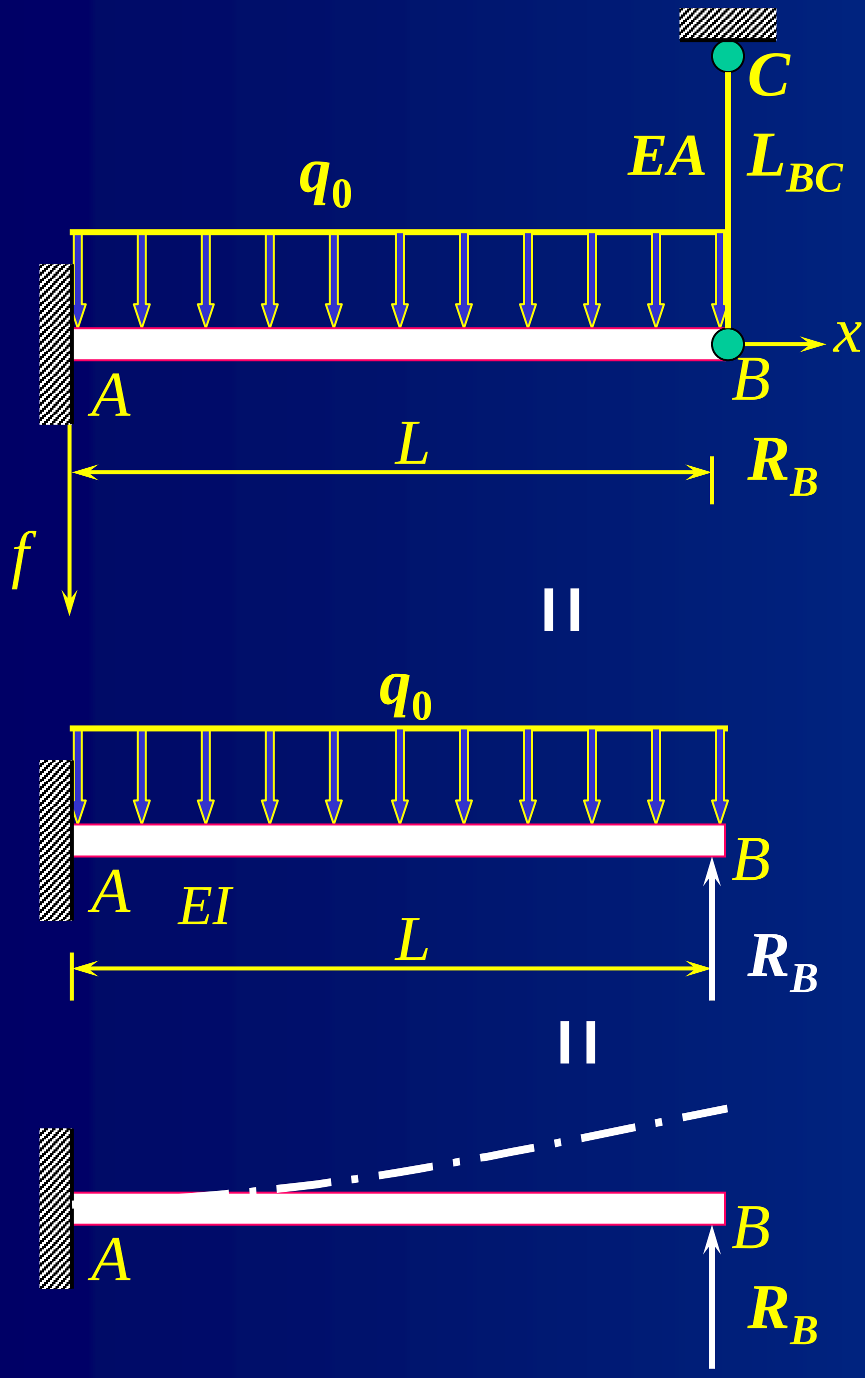
$$f_{Bq} = \frac{qL^4}{8EI};\ f_{BR_B} = -\frac{R_B L^3}{3EI}$$

❹补充方程

$$\frac{qL^4}{8EI} - \frac{R_B L^3}{3EI} = 0 \qquad \therefore R_B = \frac{3qL}{8}$$

❺求解其它问题

（反力、应力、变形等）



例10　求B点反力

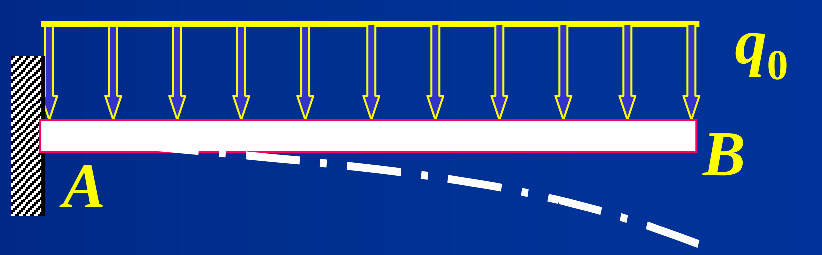
解：❶建立静定基

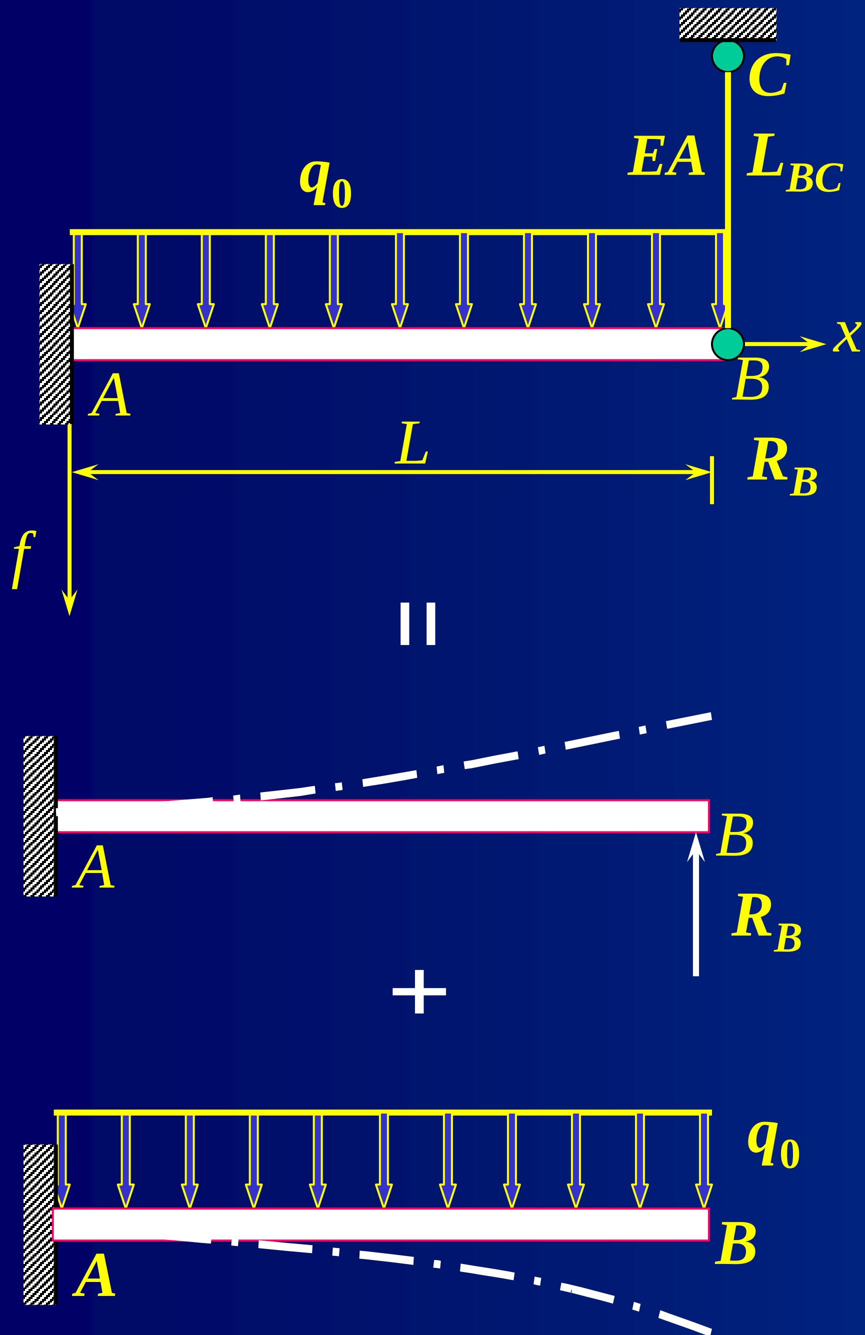
❷几何方程——

变形协调方程

$$f_B = f_{Bq} + f_{BR_B} = \Delta L_{BC}$$

+





❸物理方程 ——

变形与力的关系

$$f_{Bq}=\frac{qL^4}{8EI}\ ;\quad f_{BR_B}=-\frac{R_BL^3}{3EI}$$

$$\Delta L_{BC}=\frac{R_BL_{BC}}{EA}$$

❹补充方程

$$\frac{qL^4}{8EI}-\frac{R_BL^3}{3EI}=\frac{R_BL_{BC}}{EA}$$

$$\therefore R_B=\frac{qL^4}{8I\left(\frac{L_{BC}}{A}+\frac{L^3}{3EI}\right)}$$

❺求解其它问题

（反力、应力、变形等）

本章小结：

1、微分方程的导出
2、微分方程的解法 —— 积分法求变形
3、叠加法求变形
4、变形比较法 —— 超静定梁

$$\boxed{f''(x) = -\frac{M(x)}{EI}}$$

$$\boxed{f(x) = y, \quad f'(x) = \theta}$$

习题：8.6, 8.7, 8.22, 8.29