有限元法电子教案

之二

有限元法电子教案

制作人：杨庆生

Tel.　67392760

本课件包括五部分：

一、绪论

第一章 绪论

二、弹性力学基础

第二章 基本概念与假设

第三章 平面问题的基本理论

三、有限元理论及程序

第四章 有限元法的基本概念

第五章 等参元

第六章 三角形单元计算机程序

四、有限元的扩展

五、应用

二、弹性力学基础

Foundation of Elasticity Theory

第二章 基本概念与假设

第三章 平面问题的基本理论

参考书

1简明弹性力学教程　徐芝论 著

高教出版社

2弹性力学　吴家龙 著

同济大学出版社

第2章 基本概念与假设

弹性力学:

研究在外界因素（力、热）作用下弹性体的应力，应变和位移。

§ 2.1 基本概念

外力，应力，形变，位移

1.外力 External Force

体积力: 如重力,惯性力,用 Fx, Fy,Fz(x,y,z)表示,沿坐标方向为正,因次:[力]•[长度]$^{-3}$

Body Force

表面力: 液体压力,接触力,用Tx,Ty,Tz(x,y,z)表示,沿坐标方向为正,因:[力]•[长度]$^{-2}$

Surface Force

2.应力

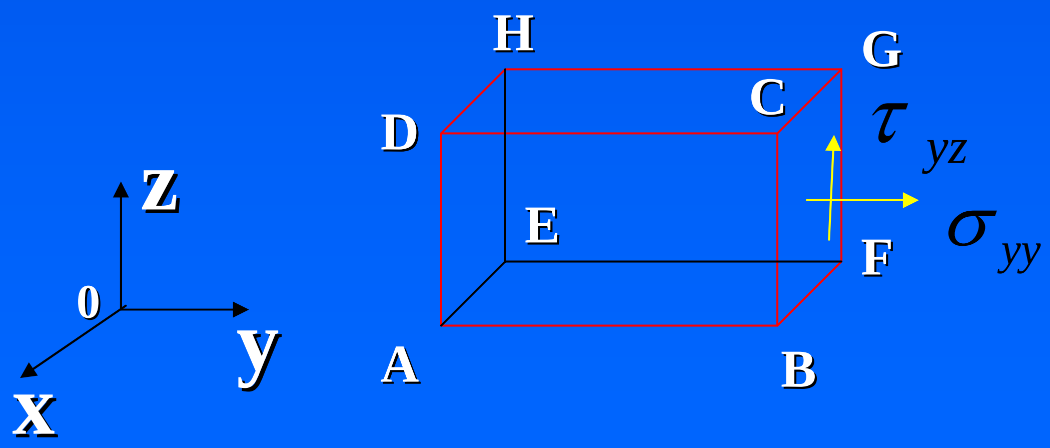
Stress

正应力 σ： σx, σy, σz

剪应力 τ： τx, τy, τz（材力）

τ_{ij}: i表示作用面的法线

j表示力的方向



σ的正.负号定义与材料力学一致，τ则不同

(1)应力所在面的外法线与坐标轴的正方向一致时，

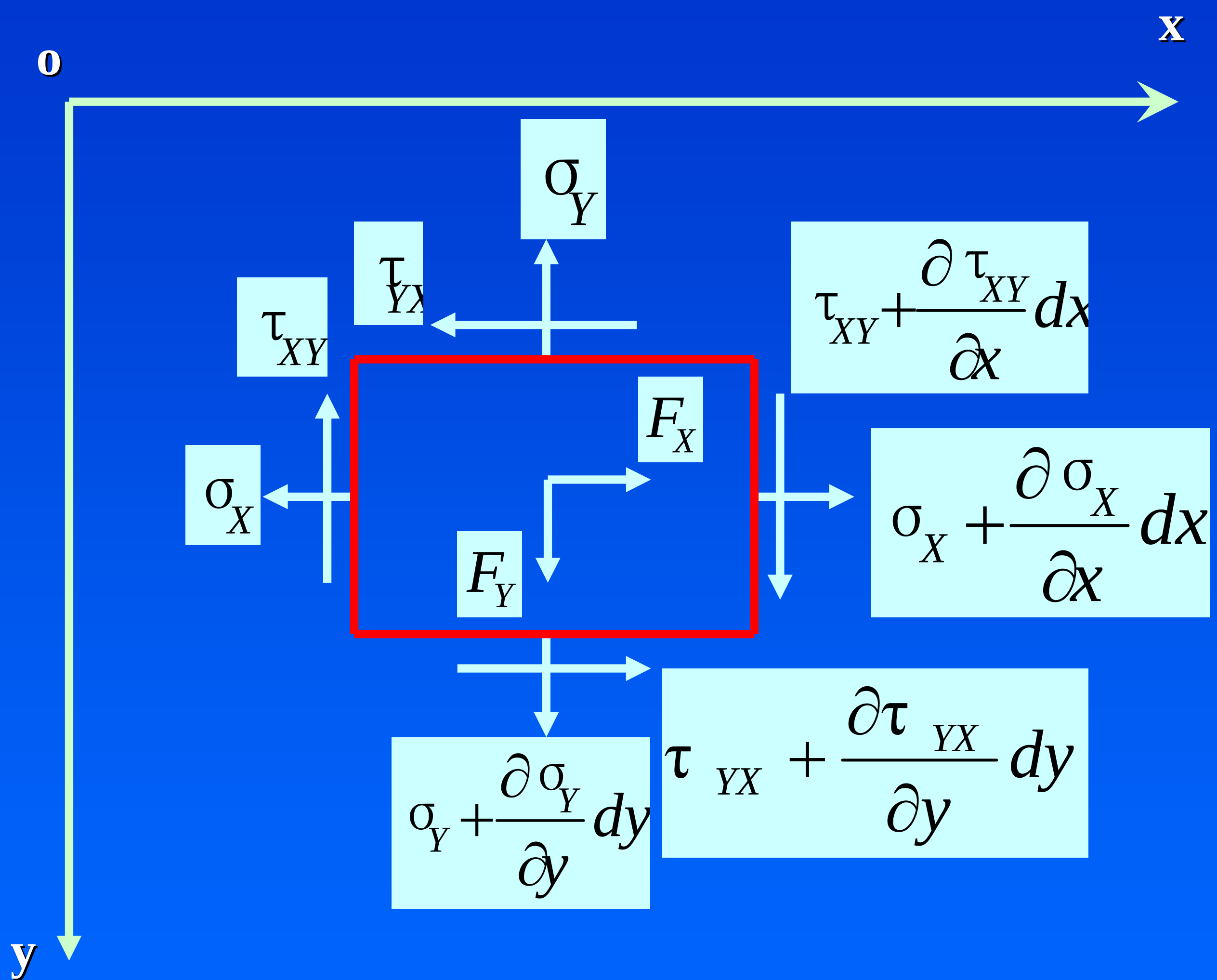
该面为正面，反之为负面。

(2)正面上应力的方向与坐标轴的正方向一致时，

应力为正，反之为负。

(3)负面上应力的方向与坐标轴的负方向一致时，

应力为正，反之为负。


o
x
y
σ_Y
τ_{YX}
τ_{XY}
$\tau_{XY}+\frac{\partial \tau_{XY}}{\partial x}dx$
F_X
σ_X
$\sigma_X+\frac{\partial \sigma_X}{\partial x}dx$
F_Y
$\tau_{YX}+\frac{\partial \tau_{YX}}{\partial y}dy$
$\sigma_Y+\frac{\partial \sigma_Y}{\partial y}dy$

3.应变 Strain

正应变 ε：ε x, ε y, ε z 伸长为正

（无因次）

剪应变 γ：γ xy, γ xz, γ yz以直角变小为正

4.位移: Displacement

用u,v,w表示,沿坐标正向为正,反向为负。

§2.2 基本假定

(1)连续体假定Continuous: 整个物体被介质填满，— σ, ε, μ = f(x,y,z)可求导，f′,f″存在。

(2)均匀性假定: Homogeneous 整个物体由同一材料组成，物体中各处有相同的弹性

(3)完全弹性: Perfectly elastic 服从HOOKE'S LAW，σ ∝ ε

(4)各向同性: Isotropic 物体内一点的弹性在各个方向都相同。只有两个独立常数E, μ (G).

符合以上四个假定的物体都称为理想弹性体

(5)小变形假定 Small Deformation

应变与转角都远小于1

a. 平衡方程可在变形之前的状态上建立.

b. 所有的代数方程和微分方程都可简化为线性方程

c. 叠加原理可用

弹力问题:

- 平面问题
  - 平面应力
  - 平面应变
- 空间问题

平面问题基本方程定解问题

- (1) 平衡(运动)方程 (2个)
- (2) 几何方程 (3个)
- (3) 本构方程 (3个)

+边界条件

第3章
平面问题的基本理论
(Theory of Elasticity for Plane Problems)

主要内容

1. 建立平面应力和平面应变问题的概念;

2. 建立平衡微分方程，几何方程，物理方程，边界条件;

3. 圣维南原理;

4.求解方法,

按位移和按应力求解平面问题

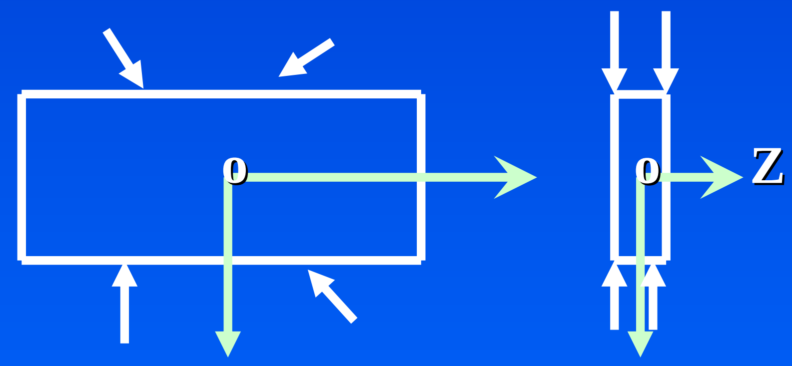
§3.1平面应力与平面应变问题

(Plane Stress and Plane Strain Problems)

受力体的几何形状和外力在一个方向上保持不变---平面问题

1.平面应

板等厚度且很薄，外力平行于板面,不沿厚度变化

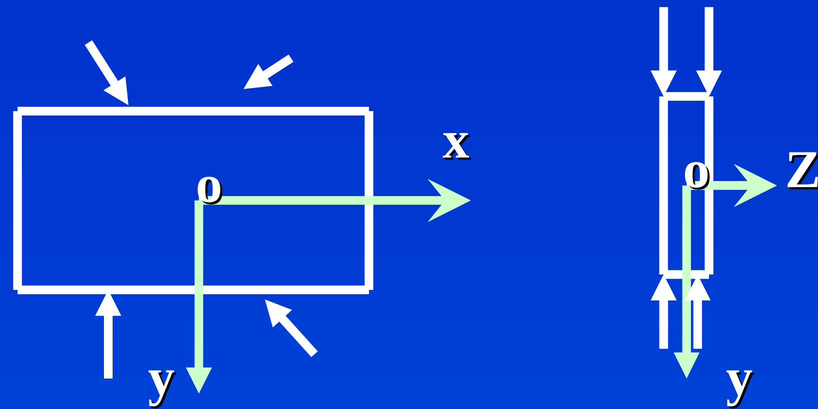


取中面为xy面，

在z=±t/2处, 横力T=0

$$\sigma_z\big|_{z=\pm t/2} = \tau_{zx}\big|_{z=\pm t/2} = \tau_{zy}\big|_{z=\pm t/2} = 0$$

由于连续性



$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$

同理： $\varepsilon, \gamma, u, v, w$ 不沿厚度变化

$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$

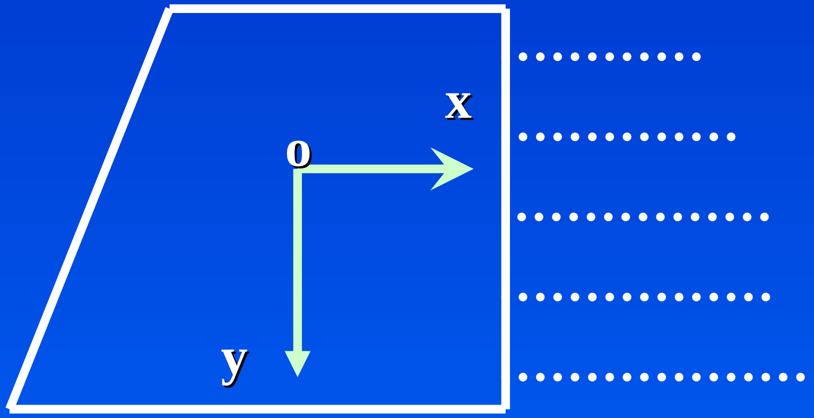
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, u, v = ?$

$\varepsilon_z \neq 0, \; w \neq 0$ 可求.

沿一方向的尺寸很长,外力平行于截面且不沿长度变化

2.平面应变 (平面位移)

$w=0$



由于对称性

$\gamma_{zy}=\gamma_{zx}=0$

$\varepsilon_z=0,\ \tau_{zy}=\tau_{zx}=0$

从三方面来分析:

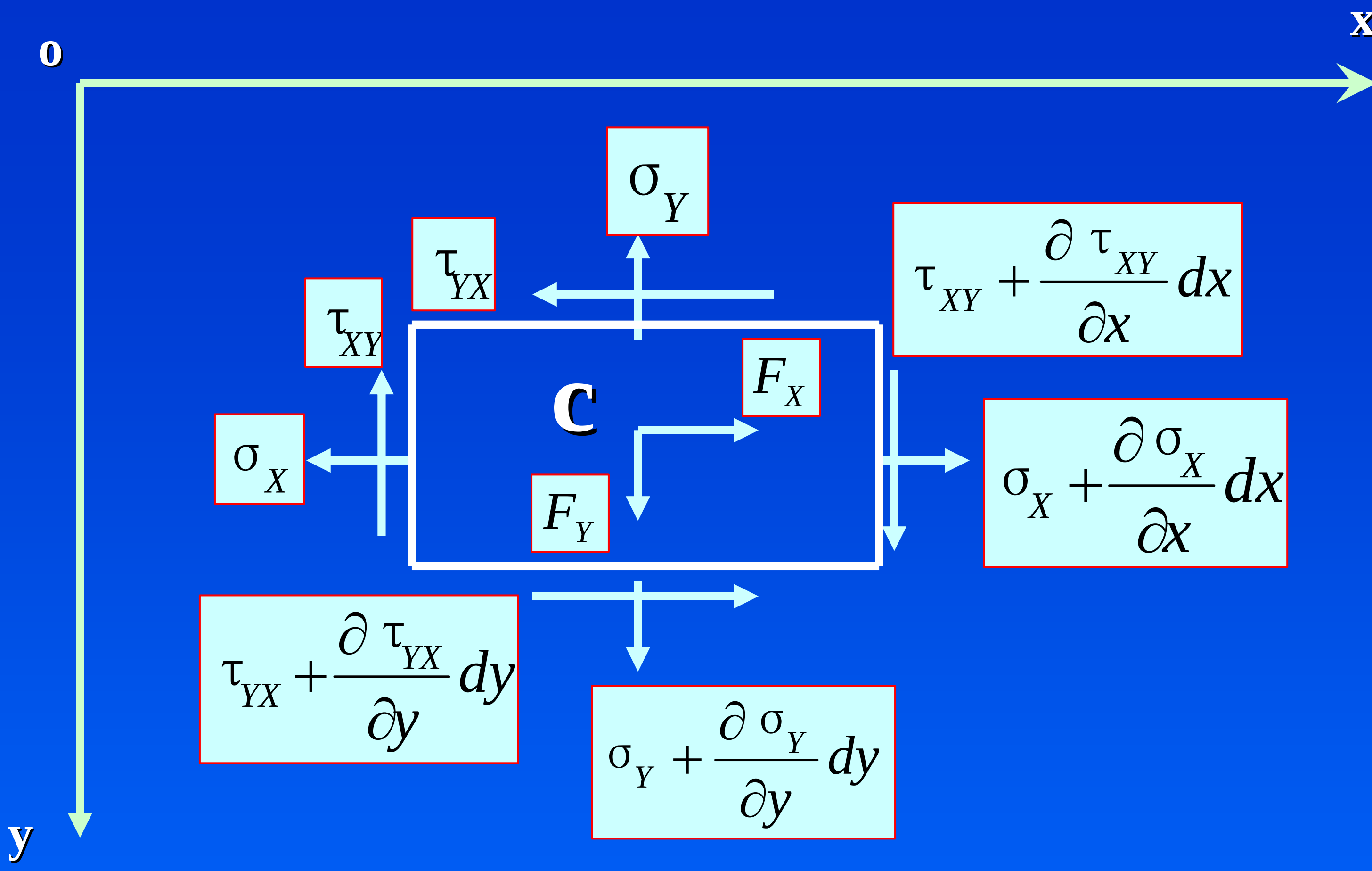
静力学——研究物体内的平衡条件以及静力边界条件

几何学——位移和应变的关系

物理学——应力与应变的关系

§ 3.2 平衡微分方程

(Differential Equations of Equilibrium)

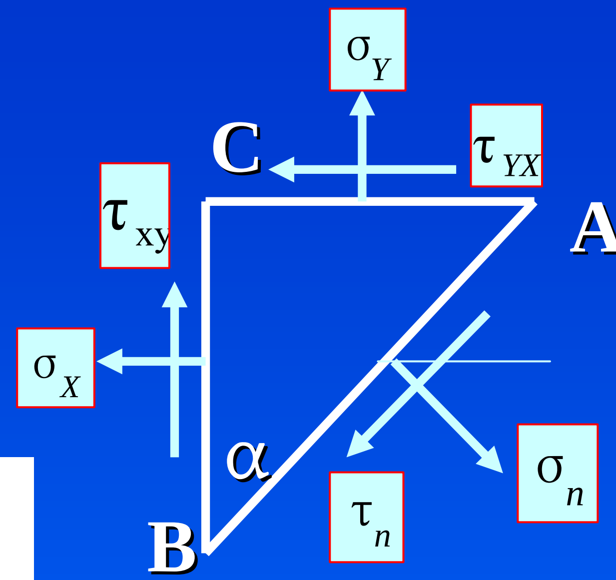


由 Σ Mc=0 → $\tau_{xy} = \tau_{yz}$

由 Σ X=0 → $\frac{\partial \sigma_X}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{YX}}{\partial y} + F_X = 0$

由 Σ Y=0 → $\frac{\partial \tau_{XY}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial y} + F_Y = 0$

§ 3.3 一点的应力状态



$$\sigma_x ds \cos\alpha + \tau_{xy} ds \sin\alpha$$

$$= \sigma_n ds \cos\alpha - \tau_n ds \sin\alpha$$

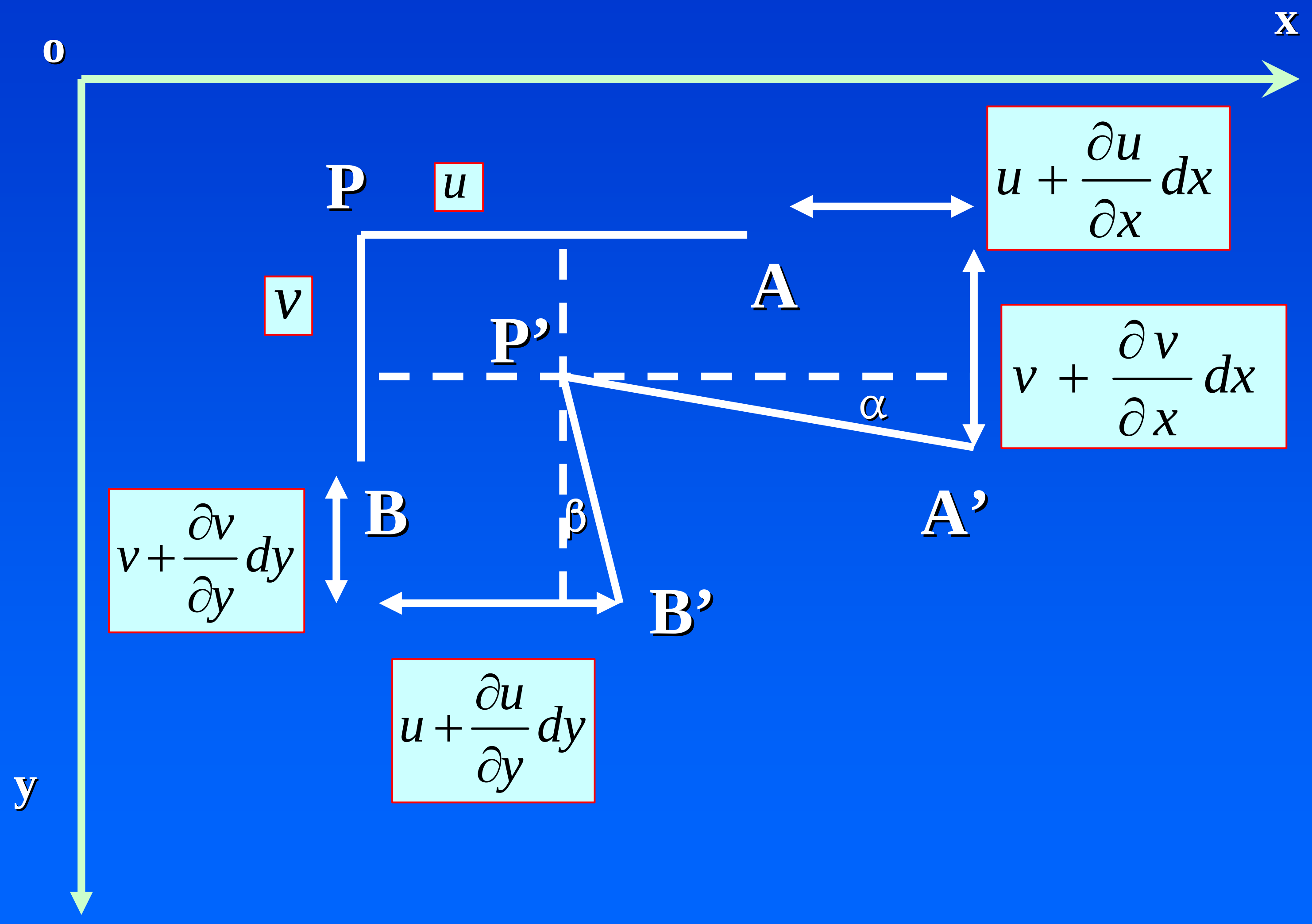
$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = \sigma_n l - \tau_n m \qquad (1)$$

$$\tau_{xy} ds \cos\alpha + \sigma_y ds \sin\alpha$$

$$= \sigma_n ds \sin\alpha + \tau_n ds \cos\alpha$$

$$\tau_{xy} l + \sigma_y m = \sigma_n m + \tau_n l \qquad (2)$$

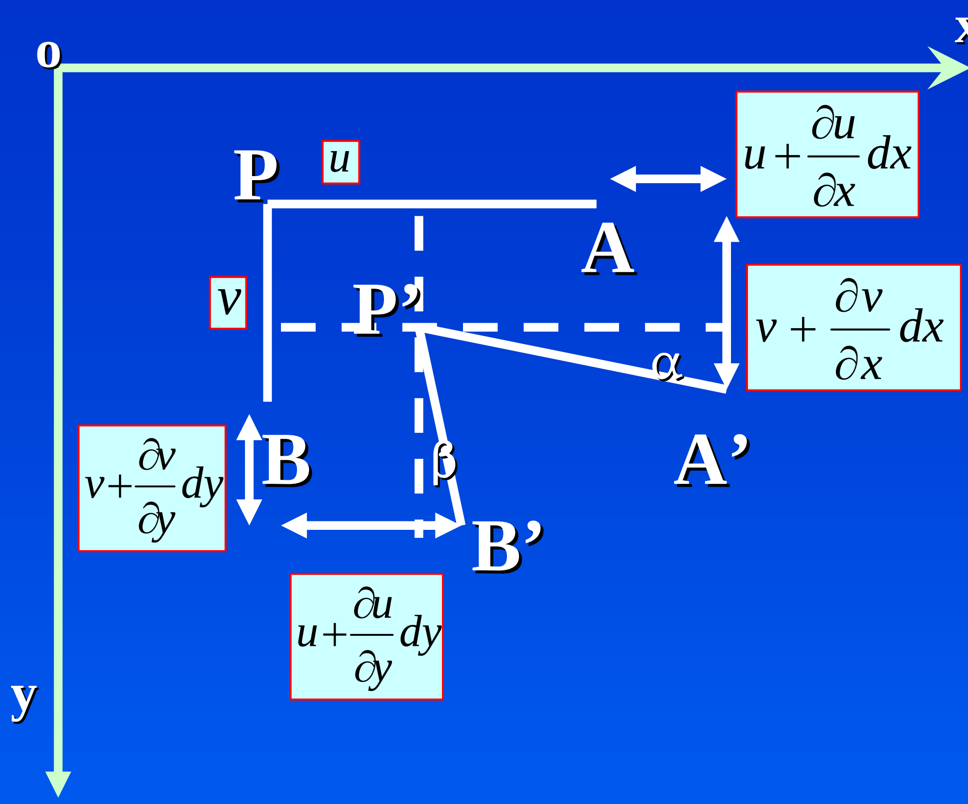
§3.4 几何方程



o
x
y
P
u
v
A
P'
$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$
$v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$
α
A'
B
β
B'
$v+\frac{\partial v}{\partial y}dy$
$u+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

x方向正应变

$$\varepsilon_x = \frac{[u + (\partial u/\partial x)dx] - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$



y方向正应变

$$\varepsilon_y = \frac{[v + (\partial v/\partial y)dy] - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

剪应变 γ_{xy}

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = tg\alpha + tg\beta = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx) - v}{dx} + \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y}dy) - u}{dy} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

已知u,v

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy},$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

如

$$u = u_0 - \omega y \;,\; v = v_0 + \omega x$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

u_0, v_0, ω 为刚体位移

变形协调方程或相容方程

(Compatibility Equation)

几何方程：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

§3.5本构方程，物理方程
应力--应变关系，HOOK'S定理

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

E--弹性模量
μ --泊松比
G--剪切模量

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

对平面应力问题

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \mu\sigma_y)/E$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$

$$\varepsilon_z = -\mu(\sigma_x + \sigma_y)/E$$

$$\gamma_{yz} = 0 \qquad \gamma_{xz} = 0$$

平面应变问题

$$\varepsilon_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \quad ,\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = (1-\mu^2)(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y)/E \\ \varepsilon_y = (1-\mu^2)(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x)/E \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases}$$

平面应力问题

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \mu\sigma_y)/E$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$

平面应变问题

$$E \to \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu \to \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = (1-\mu^2)(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y)/E \\ \varepsilon_y = (1-\mu^2)(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x)/E \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases}$$

§ 3.6 边界条件，圣维南原理

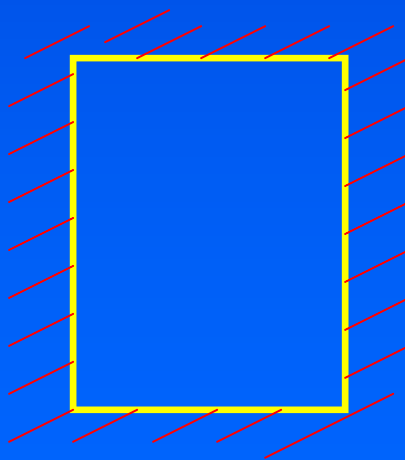
(**Boundary Conditions,**

Saint-Venant's Principle -1855)

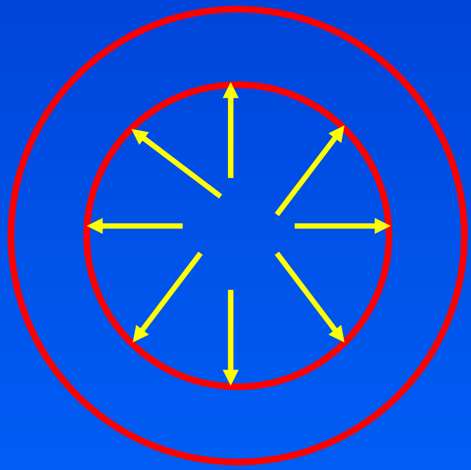
位移边界条件，应力边界条件，混合边界条件

1。位移边界条件

$$u_s = \bar{u}(x,y), \quad v_s = \bar{v}(x,y)$$



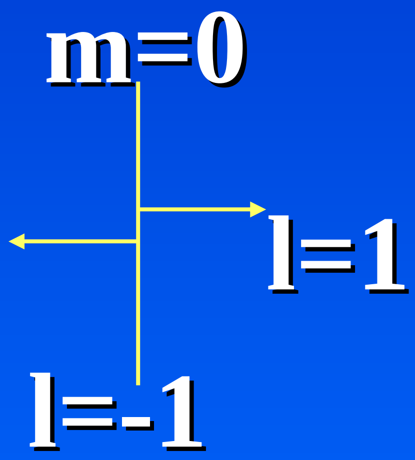
2.应力边界条件



$$\begin{cases}(\sigma_x l+\tau_{xy}m)_s=\overline{X}(x,y)\\(\sigma_y m+\tau_{xy}l)_s=\overline{Y}(x,y)\end{cases}$$

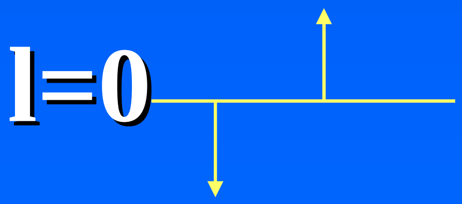
当 l= ± 1, m=0 时

$$\begin{cases}(\sigma_x)_s=\pm\overline{X}(x,y)\\(\tau_{xy})_s=\pm\overline{Y}(x,y)\end{cases}$$

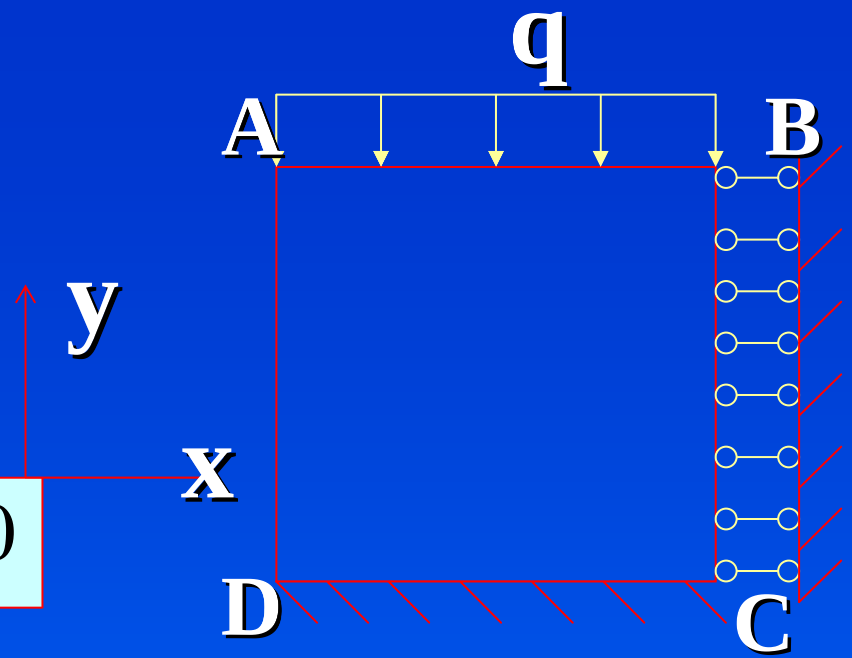


l=0, m= ± 1

$$\begin{cases}(\tau_{xy})_s=\pm\overline{X}(x,y)\\(\sigma_y)_s=\pm\overline{Y}(x,y)\end{cases}$$



3.混合边界条件



应力边界 AB:

$$(\sigma_y)_s = -q, \quad (\tau_{xy})_s = 0$$

位移边界 CD:

$$(\overline{u})_s = (\overline{v})_s = 0$$

应力-位移边界 BC:

$$(\overline{u})_s = 0, \quad (\tau_{xy})_s = 0$$

弹性力学问题在数学上常被称为边界问题

圣维南原理：

两组静力等效，但分布不同的外力引起的应力场，仅在外力作用的附近有明显的不同，远处的应力场没有差别

静力等效：主矢量相同，对同一点的主矩也相同

弹性力学问题的求解

平衡方程2个
几何方程3个
物理方程3个

应力分量：3个
应变分量：3个
位移分量：2个

经典理论：凑合解法
现代理论：数值求解
（有限元法）

§ 3.6 虚功原理

虚功原理：在某一状态{F}, 应力{σ}下，设有虚位移{a*}，对应的应变为{ε*}，则：

$$\iiint_{Ve} \{F\}^T \{a^*\} dV = \iiint_{Ve} \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV$$

$$W_i = W_e$$