有限元法
电子教案

之一

有限元法电子教案

制作人：杨庆生

Tel. 67392760

本课件包括五部分:

一、绪论

第一章 绪论

二、弹性力学基础

第二章 基本概念与假设

第三章 平面问题的基本理论

三、有限元理论及程序

第四章 有限元法的基本概念

第五章 等参元

第六章 三角形单元计算机程序

四、有限元的扩展

五、应用

一、绪论

第一章 绪论

1. 什么是有限元

有限元是求解偏微分方程的一种(近似)数值方法（Finite Element Method—FEM)

2. 发展中的有限元

20世纪初（1906年）萌芽，50-60年代形成，1960年（(Clough)提出‘有限元’术语

单元极大丰富

数学理论完善

非结构领域的发展

软件产业化、智能化

3. 中国科学家的贡献

冯康与国外同时提出有限元的概念

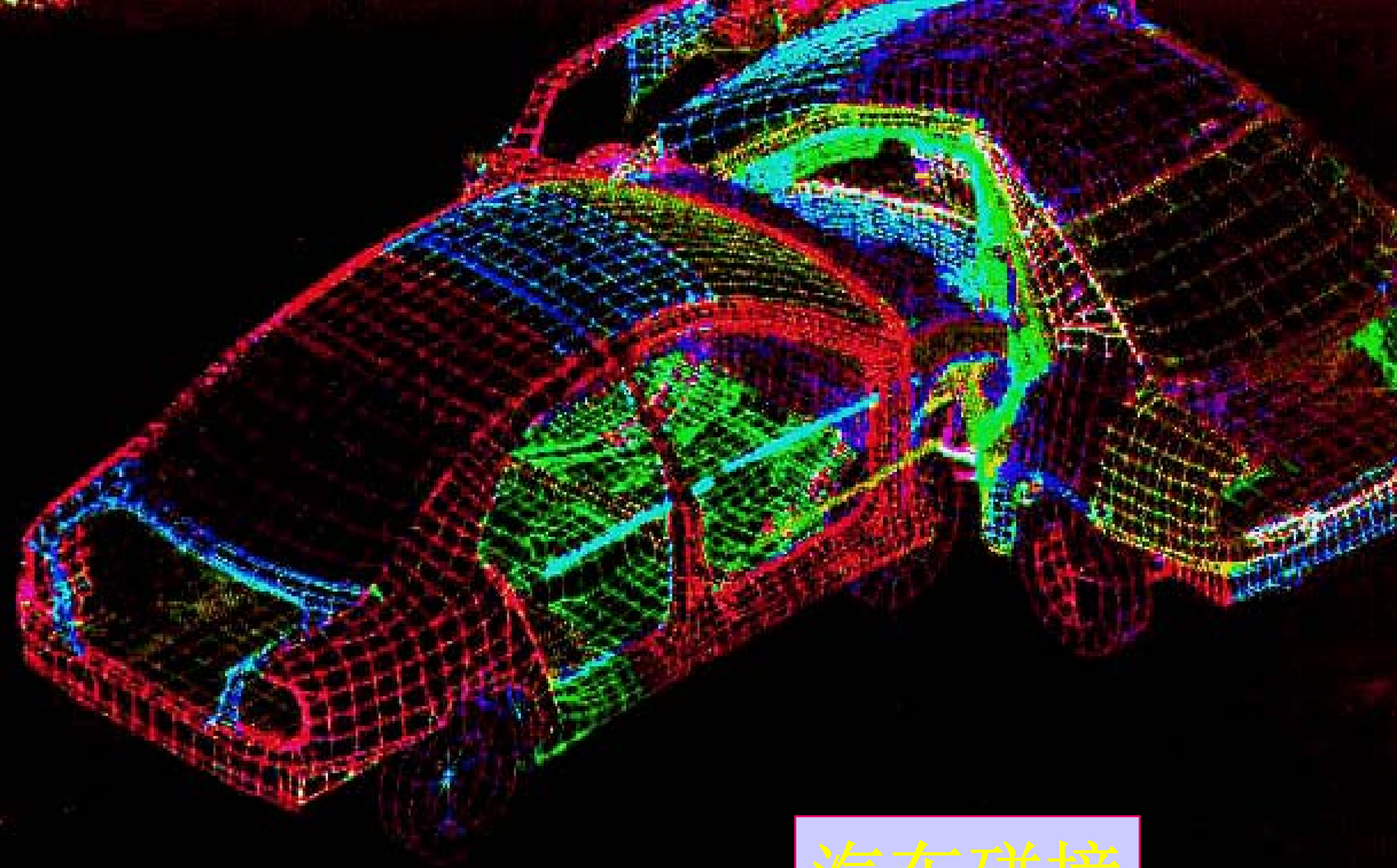
钱伟长、胡海昌的变分原理

唐立民的拟协调元

龙驭球的广义协调元

中国学者在国际相关学术组织和刊物中担任重要职务

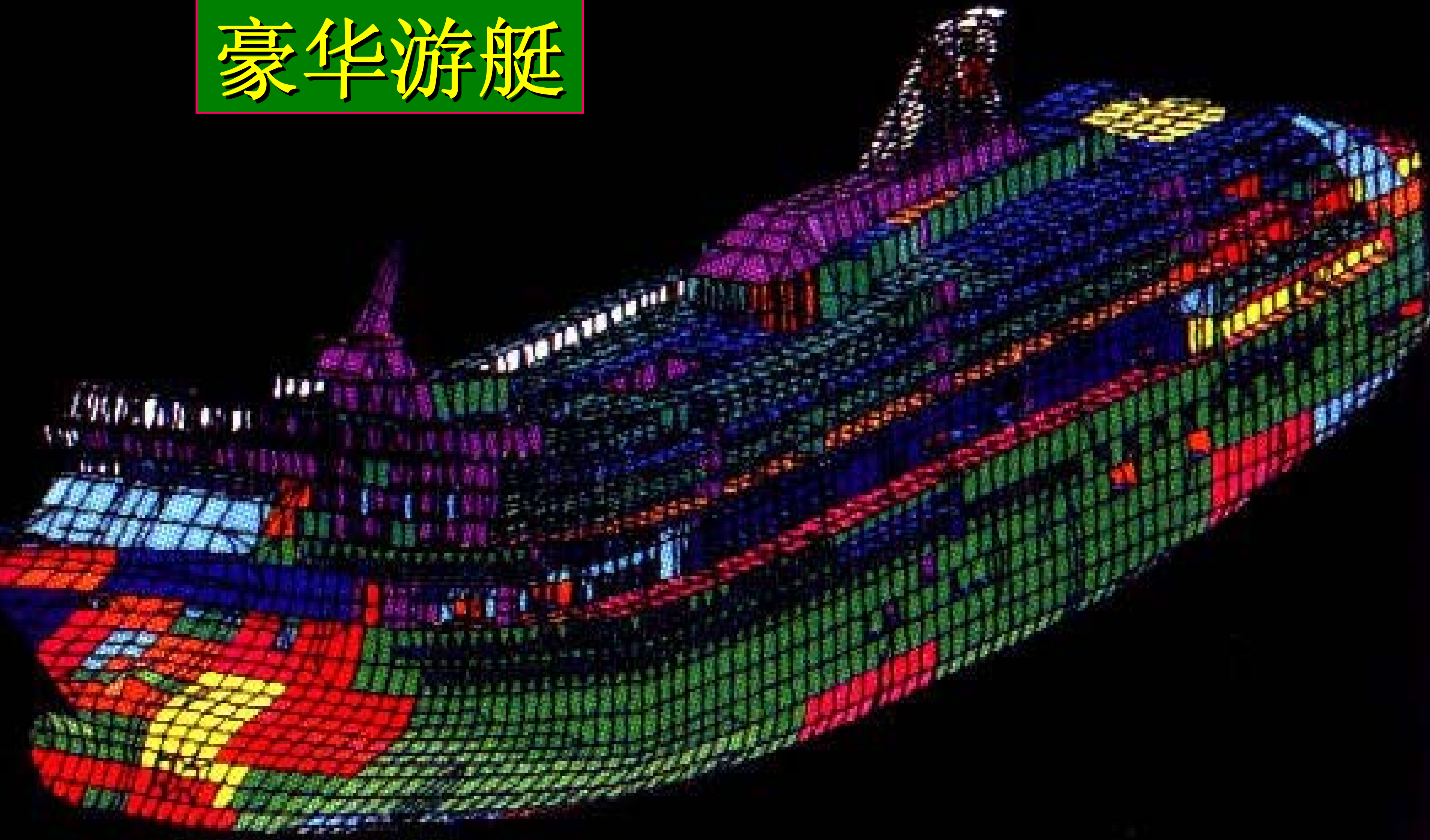
有限元软件的产业化是落后的



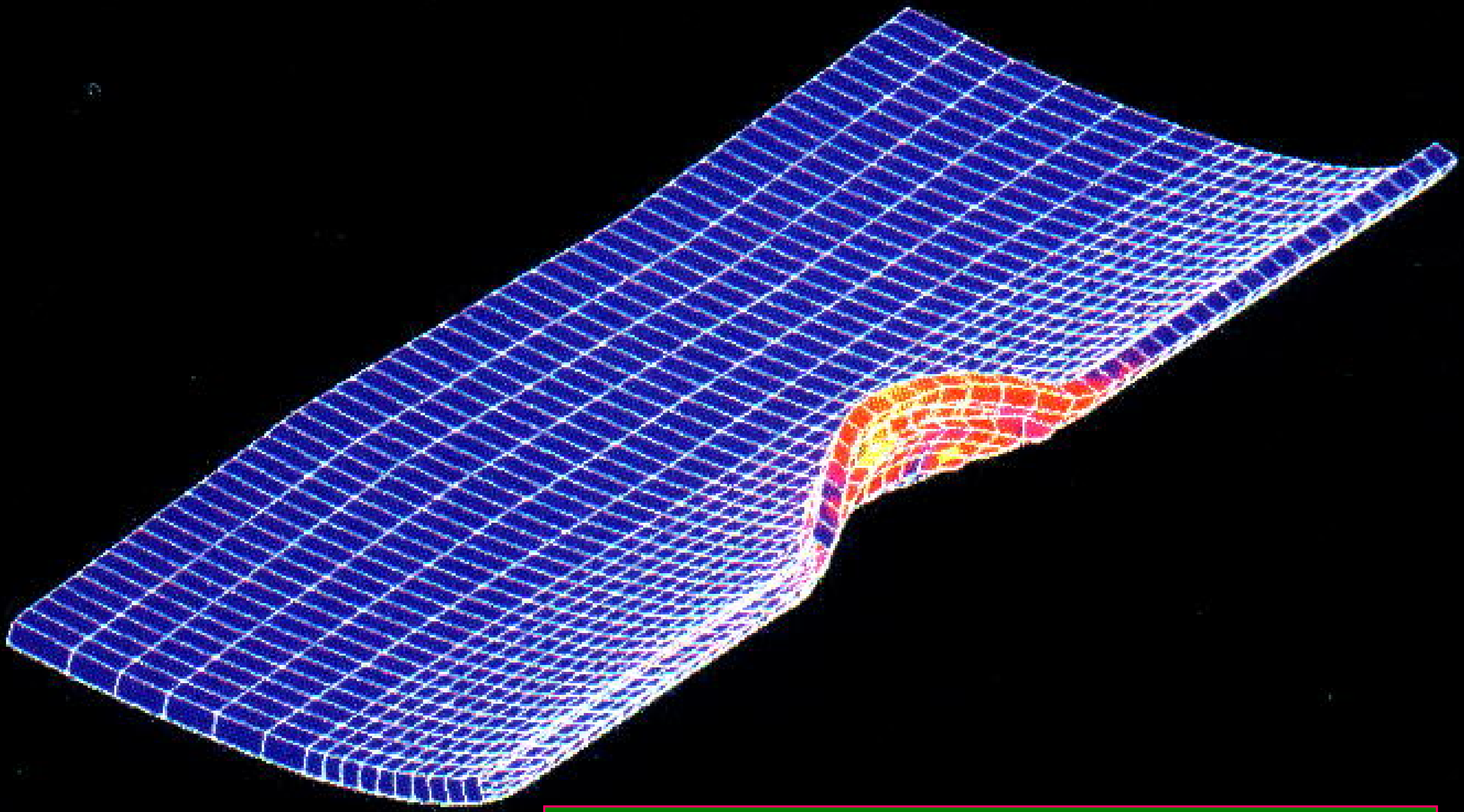
汽车碰撞

碰撞时气囊与人的相互作用

豪华游艇

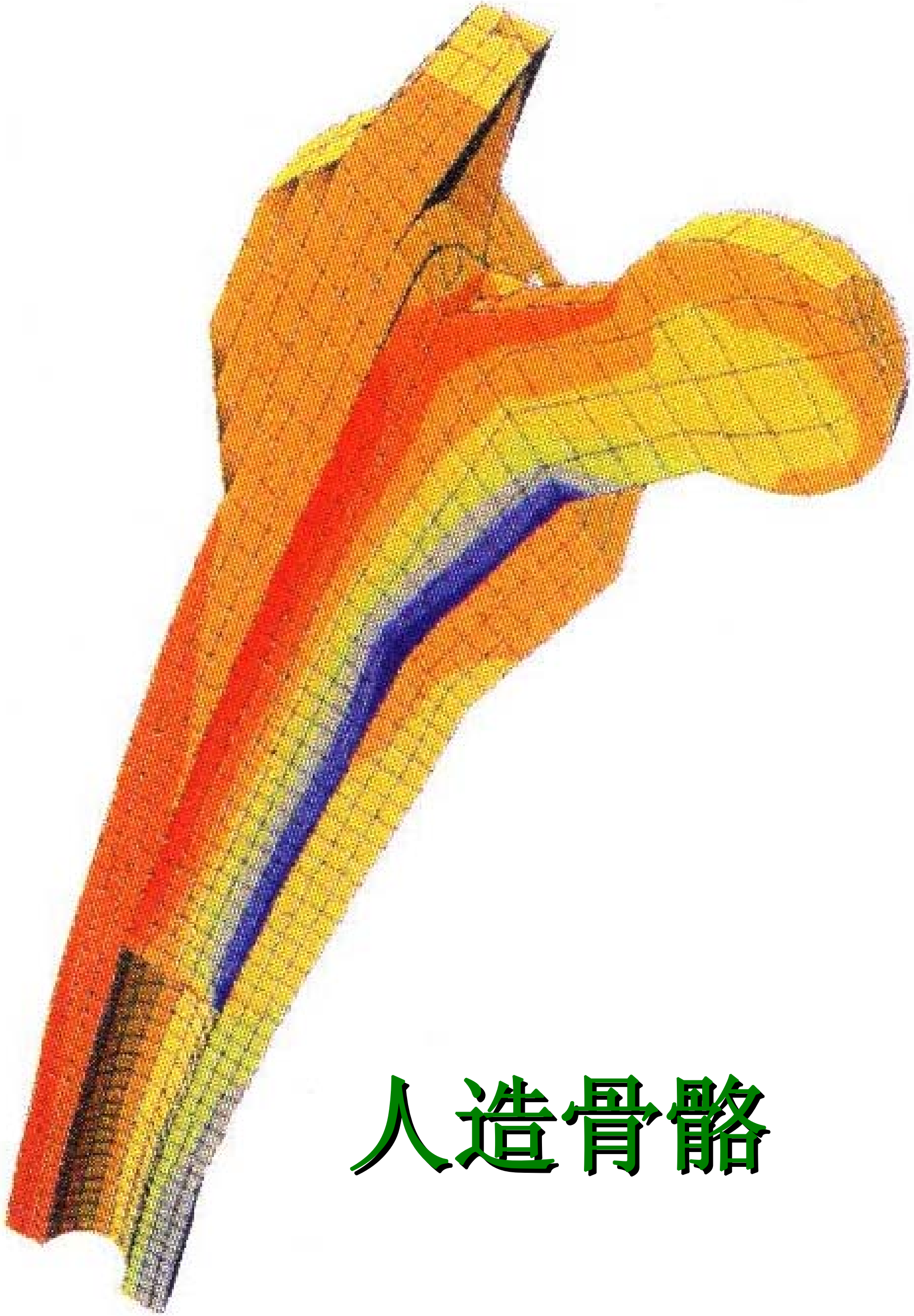


战斗机的振动模态分析

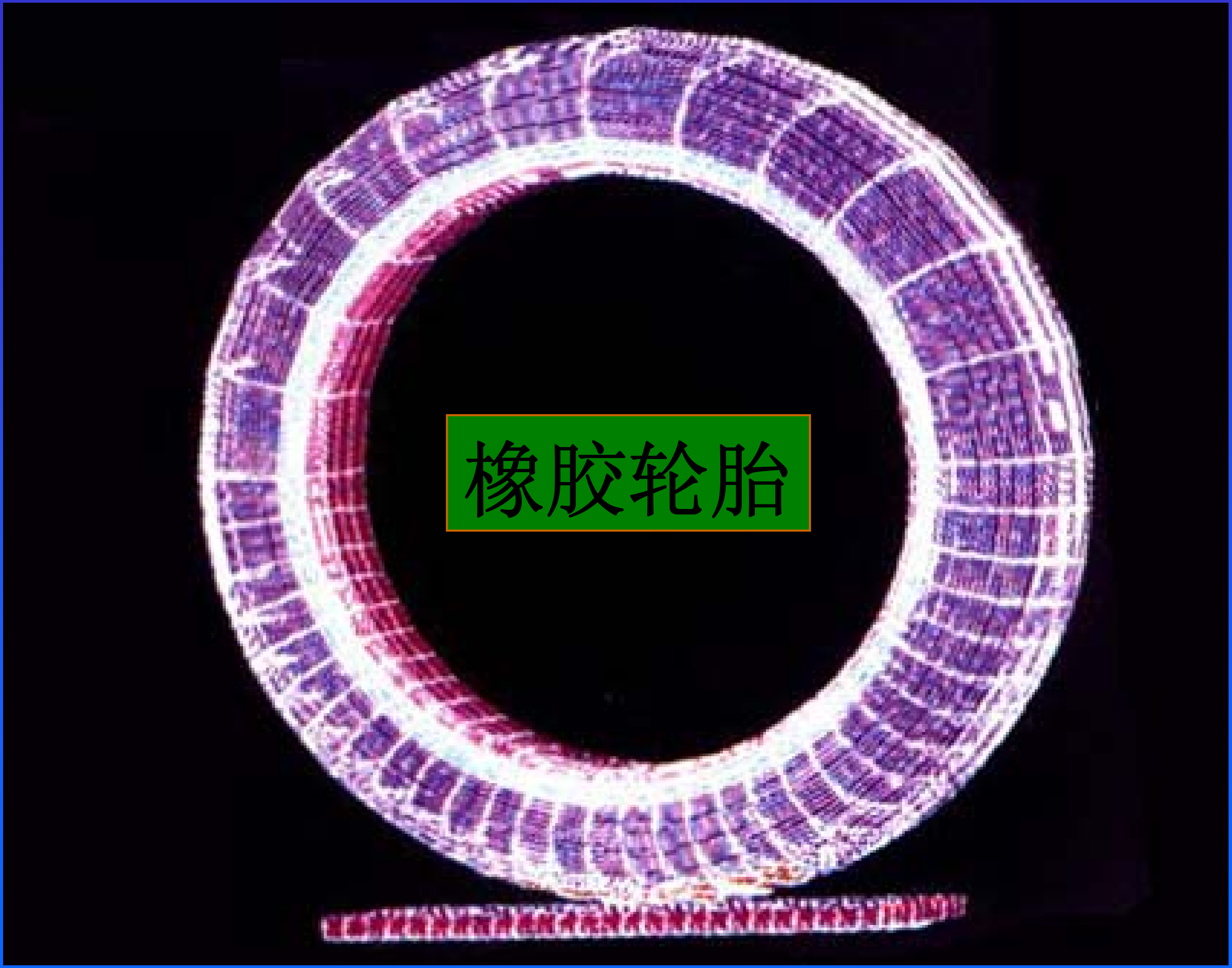


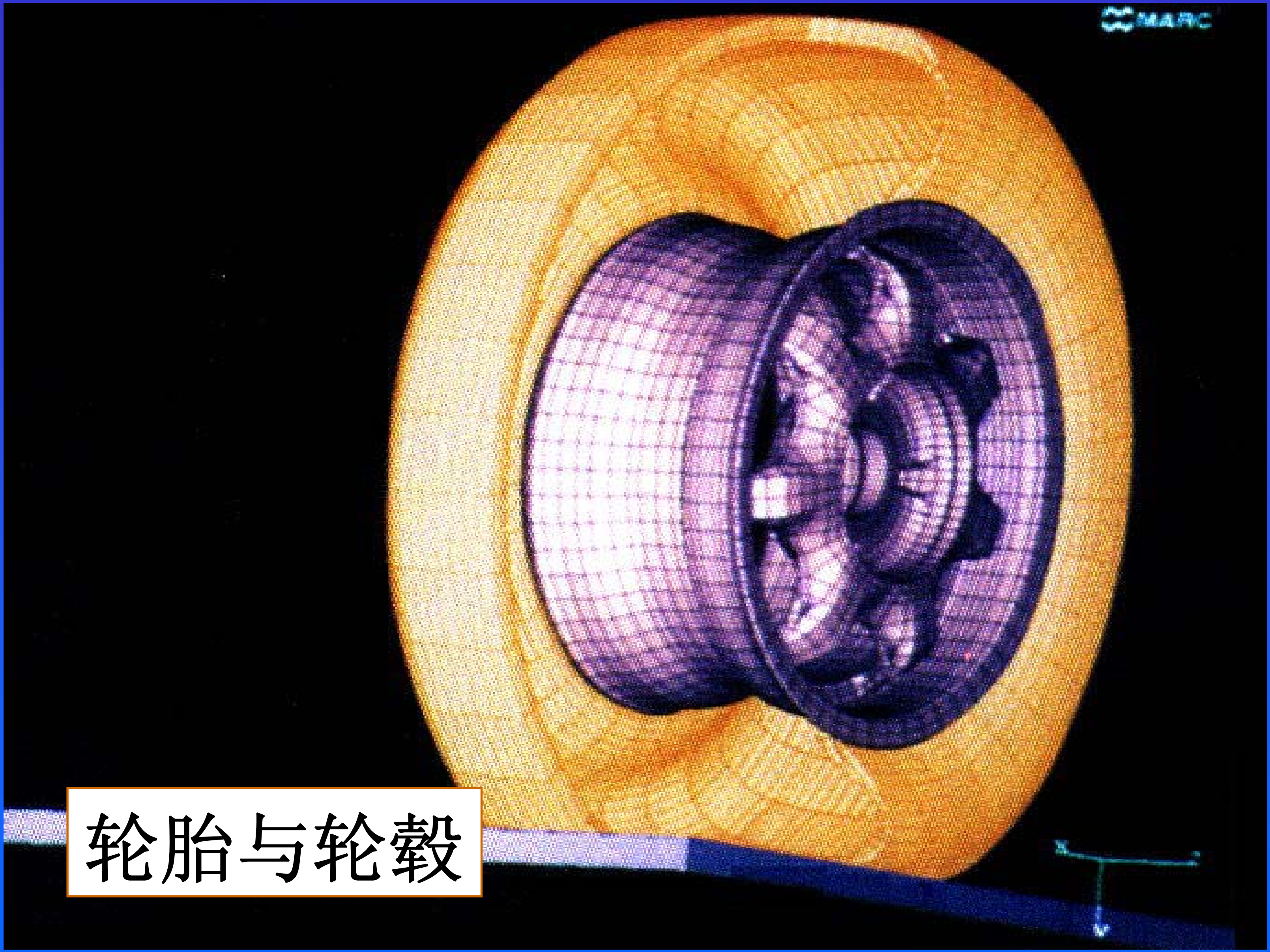
飞鸟与空中客车机翼相撞

运动中的乒乓球尾流

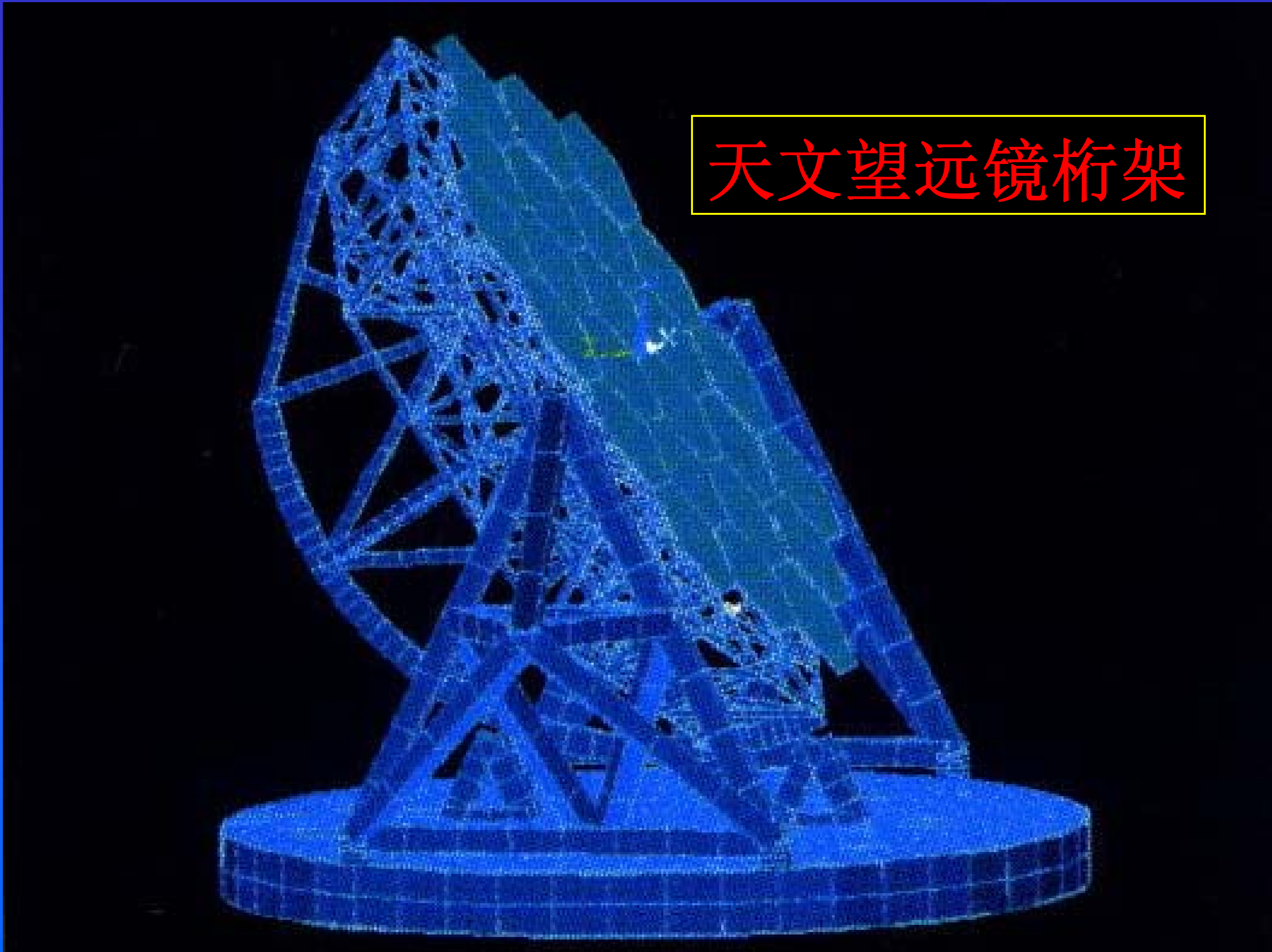


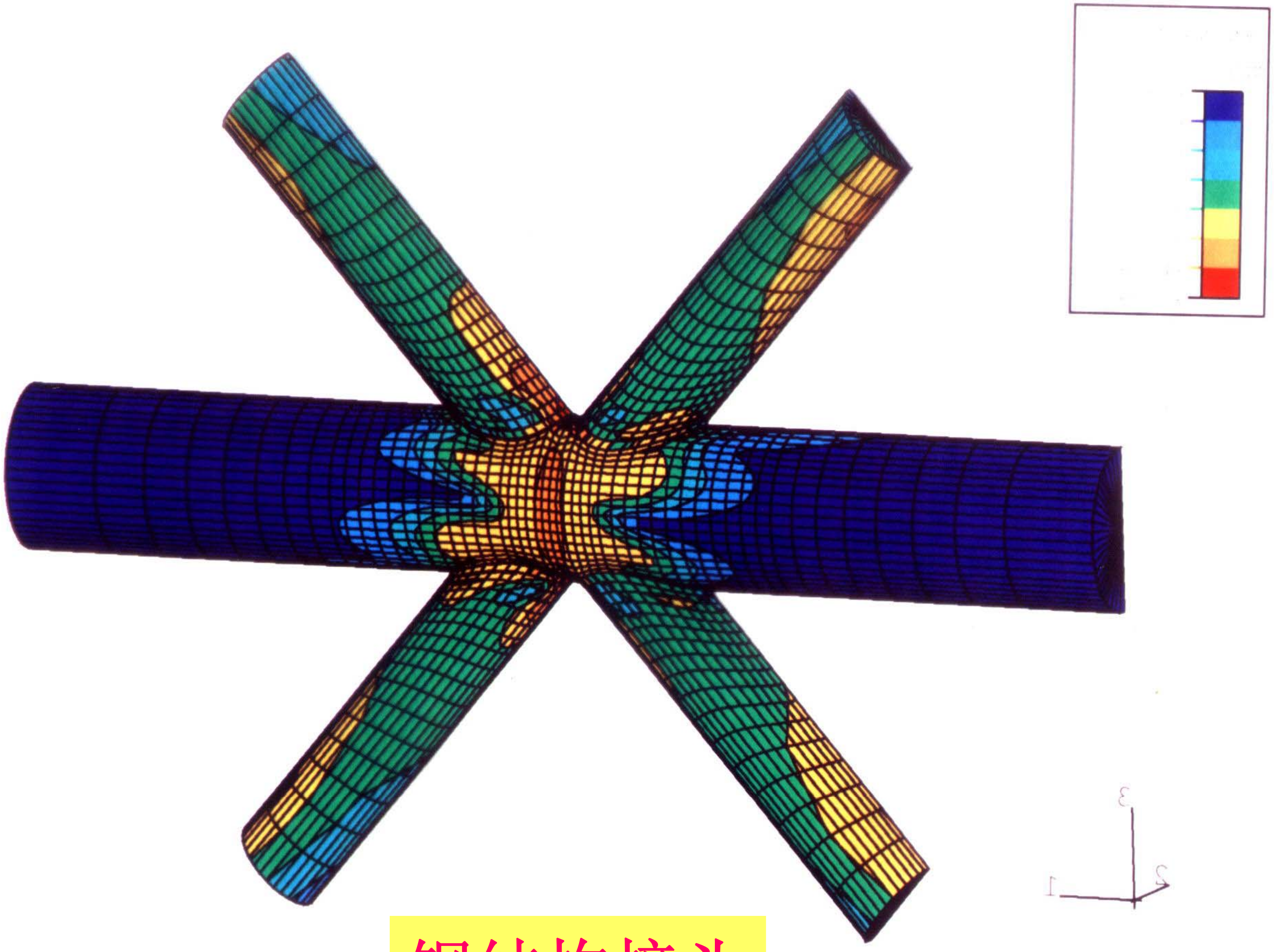
人造骨骼


橡胶轮胎

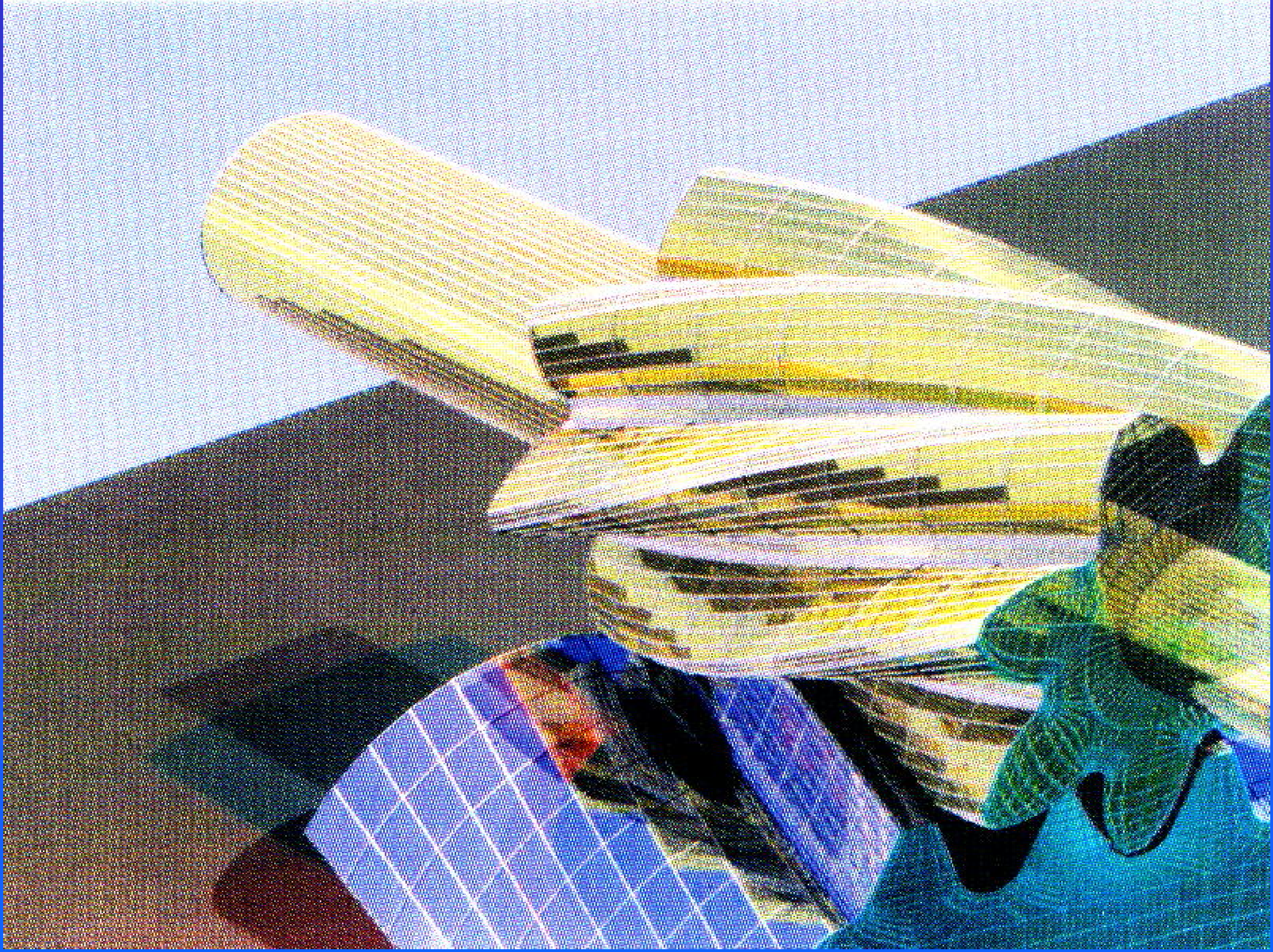


轮胎与轮毂


天文望远镜桁架



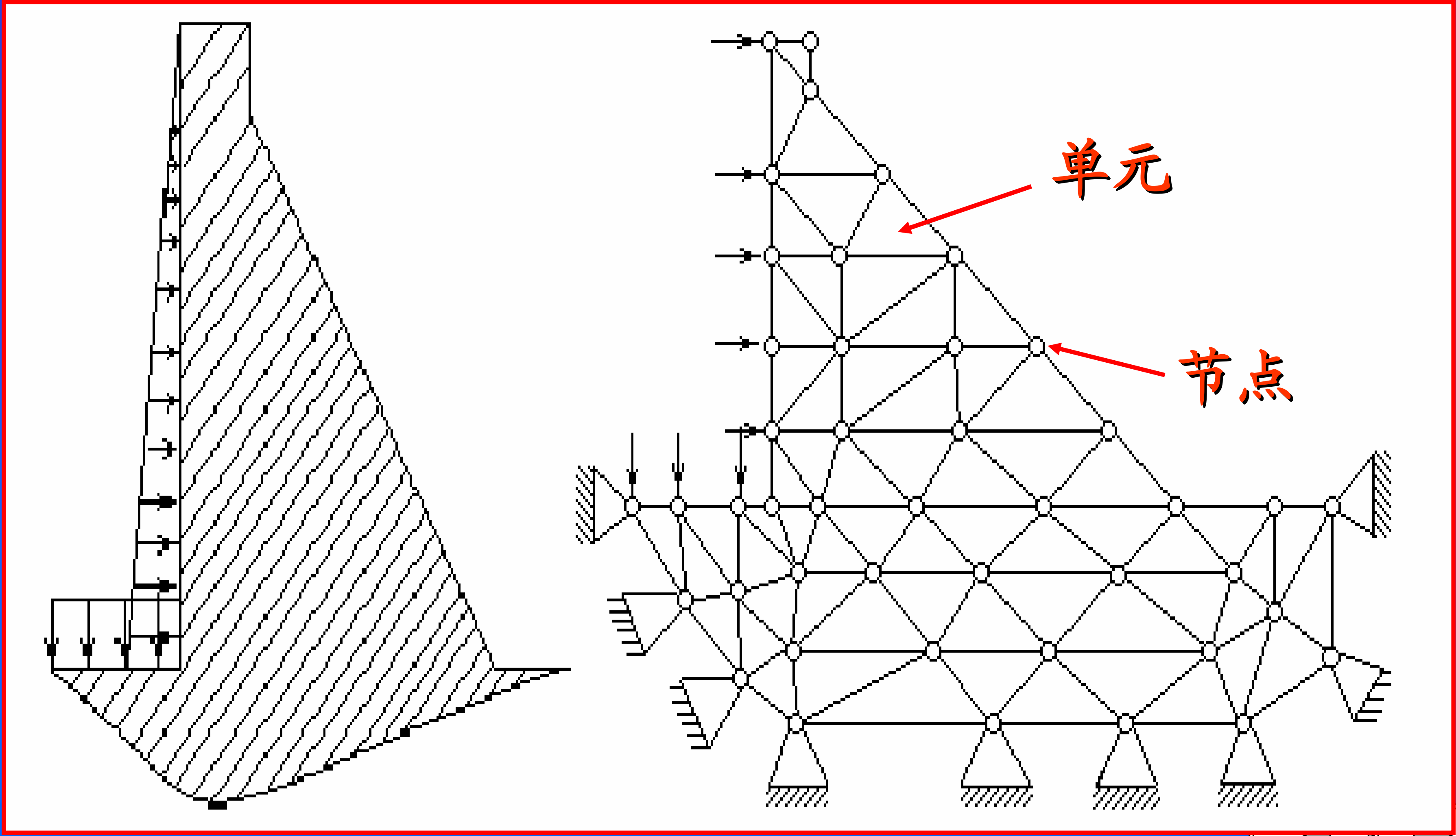
钢结构接头



齿轮啮合

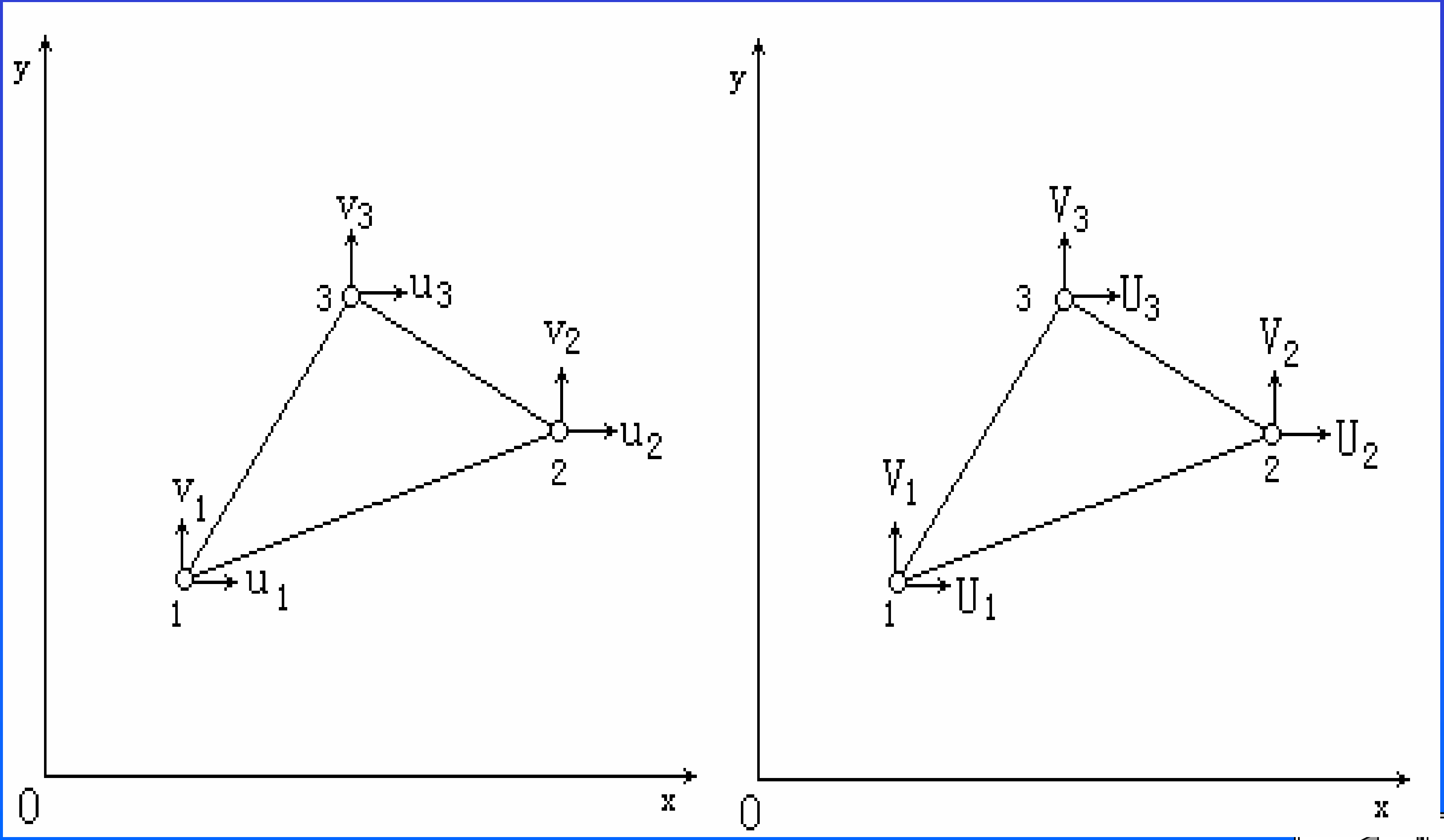
4 有限元的基本原理

(1)连续的区域分割成有限大小的区域---离散过程



(2)单元分析

2.1 选择节点的物理量（如位移、应力）作为基本未知量。



2.2 选择一组连续函数，以使单元内任一点的物理量唯一地由节点物理量表示。

2.3 根据物理关系建立单元之内的平衡方程。

(3) 按照一定次序将各个单元重新拼装成原来的整体区域---组装过程

(4) 在一定边界条件下求解整体方程。

数学上

微分方程 → 代数方程

弹性力学基本方程:

1.平衡方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[A]\{\sigma\} + \{F\} = \{0\}$$

2.几何方程:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [A]^T \{u\}$$

3.物理方程:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$[D]=[C]^{-1}$

4.边界条件:

应力边界条件:

$$\begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{Bmatrix}$$

$$[L]\{\sigma\} = \{\overline{F}\}$$

位移边界条件:

$$\{u\} = \{\overline{u}\}$$

方程的求解:

1　直接求解：精确解

2　间接求解：近似解

有限元法

最小势能原理

离散化

微分方程组 → 能量方程 →

有限元方程

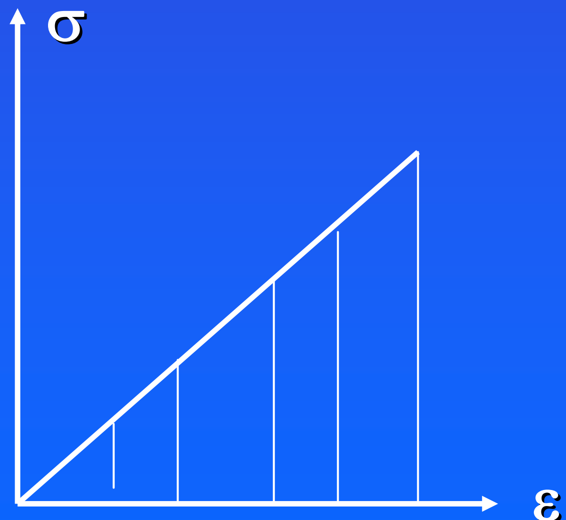
应变能（形变能）：

弹性体受力后贮存的能量

应变能密度（比能）：

单位体积的应变能

$$A = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$$



$$U = \iiint_V A dxdydz$$

对弹性体

$$A = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

对多向应力状态

$$A = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}$$

对平面问题

$$A = \frac{1}{2}[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}]$$

虚功原理

弹性体在体力 $\{F\}$ 和边界力 $\{\bar{F}\}$ 作用下，

产生的应力为 $\{\sigma\}$

设有一组虚位移{u},满足位移边界条件，

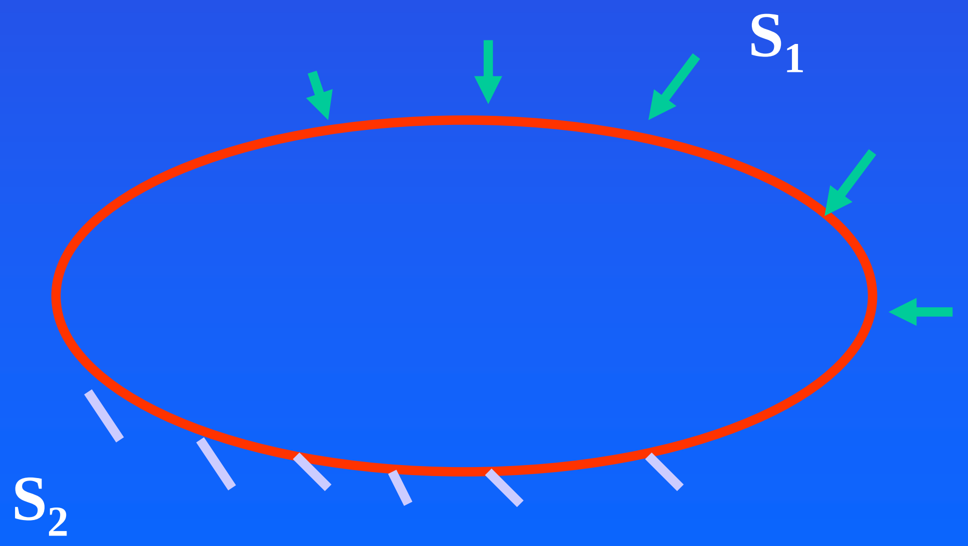
产生的应变为 $\{\varepsilon\}$

则

$$W_i = W_e$$

$$W_i = \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV$$

$$W_e = \iiint_V \{F\}^T \{u\} dV + \iint_{S_1} \{\overline{F}\}^T \{u\} dS + \iint_{S_2} \{[L]\{\sigma\}\}^T \{\overline{u}\} dS$$



弹性体的总势能

$$\Pi = U + U_P$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV$$

$$U_P = -\iiint_V \{F\}^T \{u\} dV - \iint_{S_1} \{\bar{F}\}^T \{u\} dS$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \iiint_V \{F\}^T \{u\} dV - \iint_{S_1} \{\bar{F}\}^T \{u\} dS$$

最小势能原理:

有一组位移满足几何方程和位移边界条件,

如果这种位移对应的应力满足

平衡方程和应力边界条件,

则该位移必使总势能取最小值.

$$\delta \Pi = 0$$

最小势能原理

等价于

平衡方程和应力边界条件

几何方程,位移边界条件,物理方程

+

最小势能原理